seg.guanajuato.gob.mx

GTO Grandeza de México

Secretaría de Educación

Representaciones simbólicas y algoritmos

Guía de Estudio



PREPARATORIA ABIERTA GUANAJUATO

Este material es propiedad de la Secretaría de Educación de Guanajuato y están protegidos por la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR bajo el Registro 03-2017-070611482200-01 y demás disposiciones internacionales en la materia. Esta guía tiene como único propósito que los usuarios lo consulten con finalidades educativas. Los usuarios no están autorizados para transmitir ninguno de estos materiales por vía electrónica, o reproducirlos en forma alguna por ningún medio, electrónico, mecánico, sistemas de recuperación, grabación, impresión, fotocopiado, etc.

Secretaría de Educación de Guanajuato
Yoloxochitl Bustamante Diez

Subsecretaría para el Desarrollo Educativo
José Abel Arteaga Sánchez

Dirección General de Media Superior
Ximena María Alarcón Verduzco

Dirección de Preparatoria Abierta y a Distancia
Alejandro Carretero Carretero

Departamento Académico de la
Dirección de Preparatoria Abierta y a Distancia
Vania Ruth M. Castro Ortiz

Autoría
Yolanda del Pilar López Mejía

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante, la Guía de estudio que vas a consultar a continuación es parte de una serie de materiales complementarios gratuitos que Preparatoria Abierta Guanajuato ha preparado para apoyarte en este proceso de estudiar el bachillerato no escolarizado, éstos no sustituyen a los libros de texto oficiales.

Las Guías de estudio para el Plan Modular, se han elaborado atendiendo los propósitos formativos definidos en los programas de estudio, teniendo como parte esencial una síntesis de la información contenida en los libros de texto, complementado con elementos de ubicación sobre la interrelación de las competencias y contenidos que abordarás en el Plan de estudios.

Para obtener el mayor provecho de estos textos es importante que identifiques cómo están organizados y comprendas los propósitos de cada uno de sus apartados.

Comienza por revisar el **Índice**, en él, puedes ubicar los temas que encontrarás en las guías de estudio, teniendo como referencia los libros de texto.

En la sección llamada **Punto de partida**, ubica los campos disciplinares que están en juego al estudiar los módulos, el nivel que ocupa en el mapa curricular (para saber más sobre el mapa curricular por niveles, revisa el Curso propedéutico de comunicación), y las horas estimadas de estudio por módulo. También encontrarás dos columnas que te indicarán hacia donde te diriges, cuál es el propósito de estudiar cada uno de los módulos y las competencias que deberás desarrollar para lograr dicho propósito.

Ubícate, es el apartado en el que puedes revisar el mapa curricular por niveles, te permite visualizar en dónde te encuentras y en la parte inferior puedes revisar la relación temática de éste de manera previa y posterior. De esta manera puedes programar los exámenes a presentar, ya sea siguiendo la secuencia progresiva por niveles o según la relación entre temas.

Antes de empezar, a abordar los temas de cada módulo, es necesario que realices las evaluaciones diagnósticas iniciales llamadas ¿Con qué saberes cuento?, que puedes revisar en el libro de texto digital o impreso o en la plataforma educativa mieva.mx.

Al inicio de cada unidad encontrarás tres preguntas, **¿Qué voy a aprender y cómo?,** ¿Con qué propósito? y ¿Qué saberes trabajaré?, las respuestas a estos cuestionamientos consolidarán la información que revisaste en las secciones anteriores. Revisa las preguntas completas en los libros de texto impresos o digitales.

Recuerda que esta Guía es una síntesis informativa de los libros de texto, por lo que encontrarás de manera enfática conceptos y actividades seleccionadas que te ayuden a lograr los indicadores de desempeño que están planteados en los libros con el ícono de tiro al centro. Además de otros elementos para ubicarte como los recuadros que te indican la relación temática entre módulos y las competencias transversales.

Finalmente **#Entrénate**, es una sección que te invita a realizar los exámenes diagnósticos finales, ¿ya estoy preparado?, que puedes revisar en los libros de texto o en la plataforma mieva.mx, y los exámenes de simulación en línea que Preparatoria Abierta Guanajuato ha desarrollado para que seas el gestor de tu propio aprendizaje.

ÍNDICE

Unidad 1. Números reales **4**

Números reales....5
Números reales: características y subconjuntos. 5
Números enteros positivos y negativos 5
Recta numérica....6
Valor absoluto....6
Operaciones con Números Reales....7
Suma y resta 7
Multiplicación....8
División....9
Orden de las operaciones....9
Potenciación....10
Radicación 12
Propiedades de la radicación 12
Exponentes racionales....13
Operaciones con fracciones 13
Fracciones equivalentes....13
Suma y resta de fracciones 14
Multiplicación o producto de fracciones 14
División de fracciones....14
Números mixtos 15
Divisibilidad....16
Divisores y múltiplos....17
Números primos 17
Números compuestos....19
Descomposición en factores primos 19
Mínimo común múltiplo (MCM)....20
Máximo común divisor (MCD)....21
Ecuaciones y propiedades de la igualdad 22
Razones y proporciones 25
Propiedades de una proporción....26

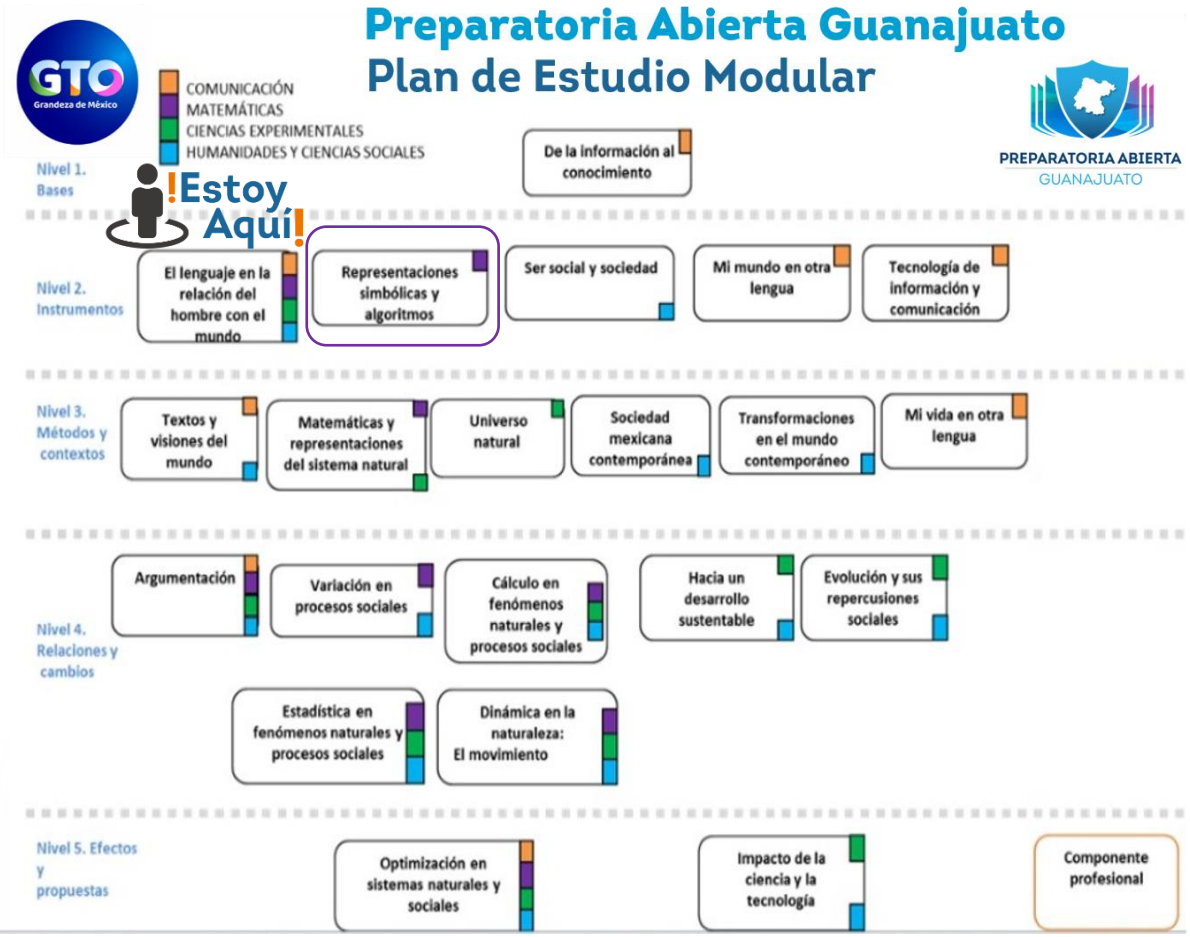
Unidad 2. Lenguaje algebraico 29
El lenguaje algebraico....30
Expresiones algebraicas....30
Operaciones con polinomios....30
Suma de polinomios....30
Resta de polinomios....31
Multiplicación de polinomios....31
División de polinomios....32
Ecuaciones lineales....36
Gráficas de ecuaciones lineales con dos incógnitas....38
Sistema de ecuaciones lineales....40
Método de sustitución. 41
Método de igualación....42
Método Gráfico 43
Ecuaciones cuadráticas 44
Resolución de ecuaciones cuadráticas 45
Factorización....45
Factorización por factor común....45
Factorización de diferencias de cuadrados 46
Factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos....47
Factorización de Trinomios de la forma: x^2+bx+c 48
Método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas....49
Método de fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas 50

ANEXO. CORRECCIONES DE EDICIÓN EN EL LIBRO DE TEXTO 53

Fuentes de consulta 53

Campo(s) disciplinar(es): Matemáticas Nivel: II (Instrumentos)	Módulo: Representaciones simbólicas y algoritmos Horas estimadas de estudio: 79 horas
Propósito formativo **Este módulo tiene como propósito, que desarrolles competencias que te permitan:** **Plantear problemas** contextualizados, aplicables al entorno del estudiante y proponer soluciones a través del **uso de modelos matemáticos lineales y cuadráticos** cuya solución esté en el conjunto de los números reales.	**Competencias disciplinares básicas:** **Al finalizar el módulo deberás contar con las siguientes competencias:** Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

#Ubícate



Previamente

Curso propedéutico de Matemáticas

Este módulo tiene mayor relación temática con

Posteriormente

Adquirirás herramientas necesarias para interpretar y solucionar problemas, principalmente en los módulos 6, 8, 9, 14,15,16,18,19 y 20.



Antes de empezar

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad, **¿Con qué saberes cuento?** que aparece en las págs. 14 y 15 del libro de texto correspondiente a este módulo, una vez que termines compara tus respuestas con las que aparecen en el apéndice del mismo libro en la pág.184.

¿Cuáles fueron tus resultados?

Qué tan sencillo te resultó resolver la evaluación diagnóstica ¿con qué saberes cuento?, si te sentiste como pez en el agua, estás listo para comenzar con el estudio de este módulo, recuerda estar monitoreando tu desempeño constantemente, basándote en las rúbricas de evaluación de las actividades y revisando el apéndice de las respuestas correctas que aparece al final de todos los libros de texto, ¡claro!, después de realizar por tí mismo los ejercicios.

Si al contrario, se te dificultó la resolución de este ejercicio de evaluación, será necesario que refresques algunos conocimientos y habilidades. Te recomendamos que revises el **curso propedéutico de matemáticas** de Preparatoria Abierta Guanajuato, que podrás consultar y descargar de manera gratuita en nuestra página de internet, www.seg.guanajuato.gob.mx/prepaabierta. Además de revisar las siguientes ligas: http://newton.matem.unam.mx/aritmetica/index.html y https://es.khanacademy.org/math/eb-1-semestre-bachillerato.

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES

¿Qué voy a aprender y cómo?

Poner un negocio es para muchas personas un sueño, algo que siempre han pensado. Se imaginan dueños de una florería, una taquería, una tienda de abarrotes, un salón de belleza y hasta de un moderno cibercafé. Si tienen suerte se convierten en pequeños empresarios y sobreviven, pero un gran número de proyectos fracasan y sus promotores se frustran. ¿Qué habría que hacer para que el sueño se convierta en realidad y el soñador sea exitoso? Primero, pensar antes de actuar, trazar una ruta para llegar a la meta.

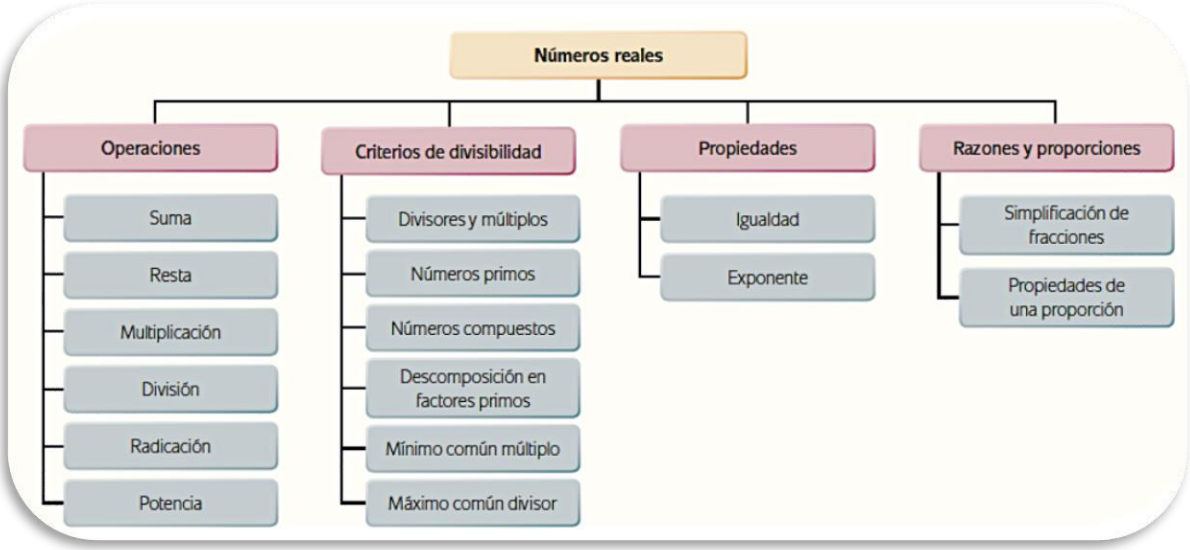
Después, no dejar de buscar y encontrar caminos no evidentes para enfrentar situaciones difíciles y salidas a cualquier obstáculo, siempre con la idea de alcanzar el objetivo deseado.

¿Con qué propósito?

El propósito de esta unidad es que utilices los **números reales en la resolución de problemas** relacionados con diversas áreas del conocimiento y con tu entorno.

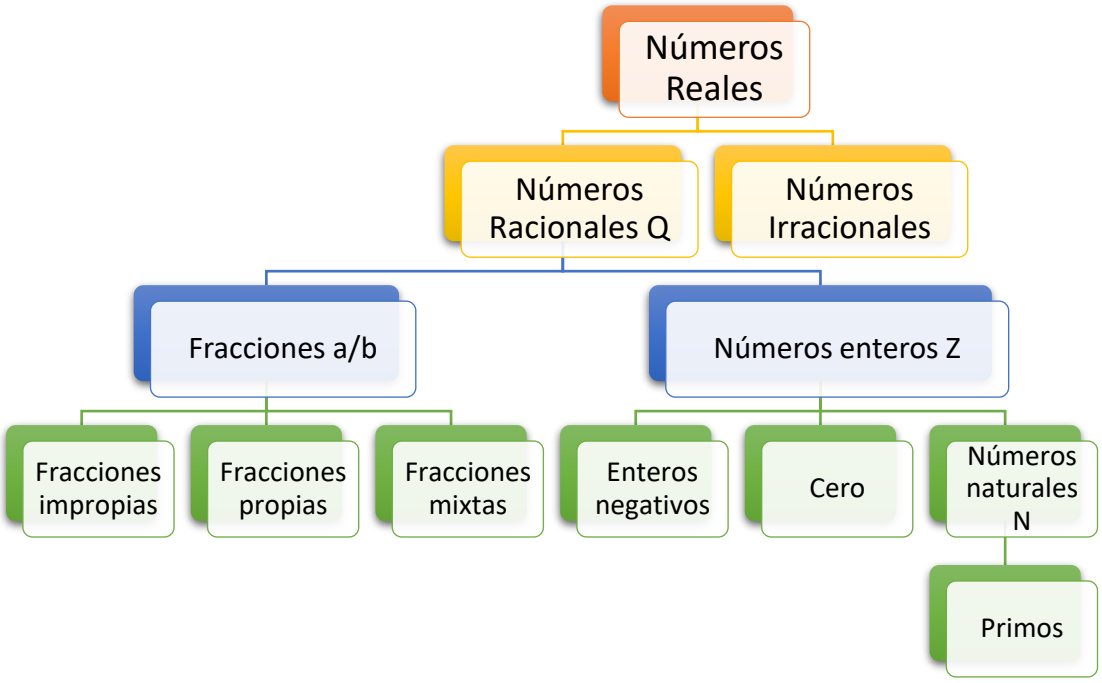
¿Qué saberes trabajaré?

Para interpretar situaciones problemáticas y construir alternativas de solución deberás familiarizarte con los **números reales y sus subconjuntos** (**enteros positivos y negativos, racionales e irracionales**); manejar las **operaciones básicas** con ellos (**suma, resta, multiplicación, división, potencia y radicación**); aplicar las reglas de cada una, incluyendo los principios de los **exponentes y las raíces**; realizar operaciones en casos particulares como las **fracciones**; analizar **la divisibilidad** y los conceptos relacionados con ésta: **divisores, múltiplos, números primos y compuestos, mínimo común múltiplo y máximo común divisor**; aplicar las **propiedades de la igualdad** para manipular **ecuaciones** y despejar la incógnita; y utilizar las **razones y proporciones** para analizar relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. Todo ello con una actitud analítica, sistemática, creativa y, por supuesto, ¡de autonomía!



Números reales

Se usan para describir cantidades como la edad, tamaño de un recipiente, población, etc. Los cuales están conformados los números racionales y los irracionales.



Números reales: características y subconjuntos.

Números enteros positivos y negativos

Los primeros números que el ser humano utilizo para interpretar la realidad y cuantificarla fueron los **naturales (N)**, 1, 2, 3, 4, 5… sucesivamente hasta el **infinito (∞)**, y que se usan de forma cotidiana. Sin embargo, los números naturales positivos no se pueden aplicar a situaciones en las que tenemos que "quitar o restar", pues para ello las cantidades se representan como negativas. Al conjunto de números que incluyen los números negativos además de los positivos se le denomina **números enteros (Z)**.

Todo número entero es un **número racional (Q)** pues lo podemos expresar como cociente**,** por ejemplo, el número 7 lo podemos escribir como $^{7}/_{1}$ pues resulta de dividir 7 ÷ 1 = 7.

Un **número real irracional** es aquel que no se puede escribir en fracción. Además, en los decimales se repiten sin presentar ninguna periodicidad. Un ejemplo de número irracional es π (Pi), cuyo valor es: 3.14159265358979323846264338327 95…, aunque en general se usa 3.1416 para hacer los cálculos correspondientes. En los números irracionales los decimales siguen hasta el infinito sin mostrar ningún patrón, se representan indefinidamente con expresiones decimales infinitas no periódicas, a diferencia de los racionales, que pueden representarse con expresiones decimales periódicas. Los números racionales (enteros y fraccionarios o decimales) y los irracionales conforman el conjunto de los **números reales (R)**.

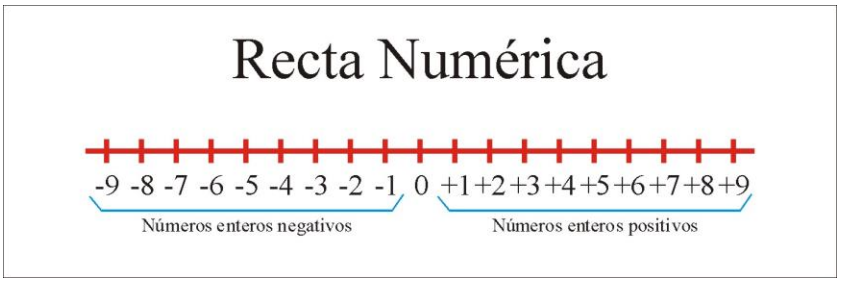
ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 3 sobre **conjunto y subconjuntos de los números reales** que aparece en la página 26 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

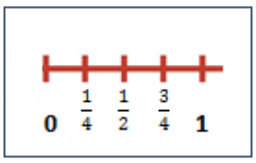
Recta numérica

Aquella que se usa para representar geométricamente los números y las operaciones que se pueden hacer con ellos.

Para trabajar en la recta, los números enteros se ordenan de menor a mayor valor a partir del origen. Así, los números que están a la izquierda de un entero son menores a él y los que están a la derecha mayores a él; explicado de otra forma se diría que dados dos números enteros a y b, únicamente puede ocurrir una de las siguientes tres posibilidades, a = b (a es igual a b), a < b (a es menor que b) o a > b (a es mayor que b).



Además de los números enteros es posible representar otros conjuntos de números. En la representación de los números racionales se establece que a cada punto de la recta le corresponde un número racional único. De manera recíproca a cada número racional le corresponde un único punto de la recta, dependiendo de la magnitud del número y la distancia que concierne a esta magnitud a partir del cero.
Entre cada dos números enteros es posible colocar un infinito de números, tanto racionales como irracionales. Por ejemplo, entre el 0 y el 1 podríamos colocar los números $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ entre otros.



ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza las actividades 4 y 5 sobre **recta numérica** que aparecen a partir de la página 29 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs.., 185 y 186 del Apéndice 1.

Valor absoluto

es simplemente la **distancia** que hay de un número al cero: |5| = 5, |-5| = 5. Tanto el 5 positivo como el 5 negativo están a “5 unidades” del cero.

Ejemplos:

$|-8| = 8, |8| = 8,$

$|0| = 0,$

$|-6.2| = 6.2, |6.2| = 6.2.$

Operaciones con Números Reales

Suma y resta

La **suma** o **adición** de dos números de igual signo se realiza sumando sus valores absolutos y poniendo al resultado el signo común.

Ejemplos:

$3 + 7 = 10;$

$-4 - 9 = -13.$

La suma o adición de dos números con signo diferente se realiza efectuando una resta de los valores absolutos de ambos números y al resultado se le antepone el signo del número que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$8 + (-15) = 8 - 15 = -7$

$-4 + 10 = 6$

$21 + (-16) = 21 - 16 = 5$

La **resta** o **sustracción** puede expresarse en términos de la suma, puesto que, en general, podemos verla como una suma de números con signo diferente, como en el último de los ejemplos anteriores, que puede verse como la suma de dos enteros 21 y – 16; o como la resta de dos naturales, 21 y 16 = 5. Observa que esta última es la resta que ya conoces, 21 – 16 = 5.

Ahora bien, la operación de restar un número negativo será equivalente a la de sumar un número positivo.

Ejemplos:

$14 - (-9) = 14 + 9 = 23$

$6 - (-5) = 6 + 5 = 11$

CASO PRÁCTICO:
Los costos de un horno de microondas, una lavadora de platos y un refrigerador son $1300, $5790 y $3920 respectivamente. Ángel y Claudia han pensado gastar $10000 en adquirirlos para el cibercafé, ¿podrán comprar los tres artículos?, o en otro caso, ¿cuánto más de lo que habían pensado tendrán que gastar?
El costo de los tres artículos se obtiene sumando los tres precios:

$$1300 + 5790 + 3920 = 11010.$$

Por lo tanto, no les alcanzara para comprar los tres artículos con $10000. Para poder comprarlos todos, la cantidad de dinero que les falta se obtiene efectuando una resta, a lo que tienen pensado gastar le restan lo que cuesta y así obtienen el monto de lo que les falta: 10000 – 11010 = –1010; les faltan $1010.

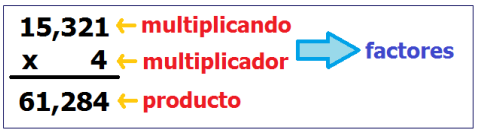
ACTIVIDAD:
- ✓ Realiza la actividad 7 sobre **resta** de la página 34 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas las págs.., 186 y 187 del Apéndice 1.

Multiplicación

Regla de los signos:

$$(+)\times(+)=(+)$$
$$(-)\times(-)=(+)$$
$$(+)\times(-)=(-)$$
$$(-)\times(+)=(-)$$

Terminología:



La **multiplicación** o **producto** de dos números reales de igual signo siempre dará como resultado un número positivo. $(+)\times(+)=(+)$, $(-)\times(-)=(+)$.

La multiplicación o producto de dos números reales de distinto signo dará como resultado un número negativo. $(+)\times(-)=(-)$, $(-)\times(+)=(-)$

Ejemplos:

$$6 \times 8 = 48$$
$$-7 \times -3 = 21$$

Operaciones con valor absoluto

Para realizar operaciones con valor absoluto, realizaremos primero la operación entre las barras y del resultado de ésta encontramos el valor absoluto.

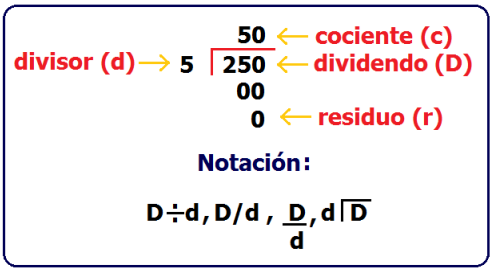
Ejemplos:

$$|-12+4|+5-2=|-8|+3=8+3=11$$

$$|-6\times 7|\times 5+10=|-42|\times 5+10=42\times 5+10=210+10=220$$

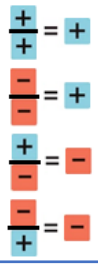
División

Terminología**:**



La **división** o **cociente** es la operación inversa de la multiplicación y consiste en averiguar cuantas veces un número (**divisor**) está contenido en otro número (**dividendo**).

Si divides 20 (dividendo) entre 5 (divisor), el resultado es 4 (**cociente**), porque 20 ÷ 5 = 4; 4 × 5 = 20.
Las reglas de los signos se aplican del mismo modo que en la multiplicación.



Ejemplos:

–36 ÷ 4 = –9
40 ÷ –5 = –8
–28 ÷ –7 = 4

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 10 sobre **división** de la página 43 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 181 del Apéndice 1.

Orden de las operaciones

Para realizar las operaciones es importante seguir el siguiente orden:

1. Realizar todos los cálculos dentro de símbolos de agrupación, como paréntesis ( ), corchetes [ ] o llaves { }. En caso de tener varias operaciones en el mismo símbolo de agrupación debemos calcular primero las potencias y raíces, luego los productos y cocientes y, finalmente, sumas y restas.

2. Evaluar primero las potencias y raíces.
3. Hacer las multiplicaciones y divisiones a medida que se presenten, de izquierda a derecha.
4. Realizar las sumas y restas a medida que se presenten, de izquierda a derecha.

Detengámonos un momento a ver como se aplican estas reglas. Con las operaciones que hemos revisado y utilizando correctamente las reglas de la jerarquía de las operaciones y el uso del paréntesis, realicemos la siguiente operación:

Ejemplo:

$$-7 \times (2 - 5 \times (-9 + 4)) + 4 =$$

$$-7 \times (2 - 5 \times (-5)) + 4 =$$

$$-7 \times (2 + 25) + 4 =$$

$$-7 \times (27) + 4 =$$

$$-189 + 4 = -185$$

NOTA: Observa detenidamente el desarrollo que viene en la página 39 del libro correspondiente a este Módulo.

Potenciación

Elevar a la **potencia**, y que es el resultado que se obtiene al multiplicar un número dos o más veces por sí mismo. En particular, la potencia dos, o cuadrado, de un número se obtiene al multiplicarlo por sí mismo y se denota escribiendo un dos pequeño en la parte superior derecha de dicho número.

Ejemplo:

El cuadrado de cinco se escribe de la siguiente forma:

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

Y el cuadrado de menos tres se escribe:

$$-3^2 = -3 \times -3 = 9.$$

Terminología

base → a^b ← exponente

El número pequeño colocado en la parte superior, que identifica a la potencia, recibe el nombre de **exponente**; el número que multiplicamos por sí mismo se llama **base**. El exponente indica cuantas veces debe multiplicarse la base por sí misma.

Propiedades de los exponentes

Para poder manejar con facilidad los exponentes es importante que conozcas sus propiedades, ya que te servirán de ayuda para simplificar algunas expresiones y así realizar operaciones de manera más sencilla.

1. **Propiedad del producto**. Un mismo número x al multiplicarse con exponentes diferentes conserva la base y se suman los exponentes: $x^a \times x^b = x^{a+b}$

   Ejemplo:
   $$3^4 \times 3^2 = (3\times3\times3\times3)\times(3\times3) = 3^{4+2} = 3^6 = 729$$

2. **Propiedad de la potencia de una potencia.** Un exponente de un número x elevado a otro exponente, es igual a la multiplicación de ambos exponentes: $\left(x^a\right)^b = x^{ab}$

   Ejemplos:
   $$\left(2^5\right)^2 = (2\times2\times2\times2\times2)^2 = (2\times2\times2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2\times2) =$$
   $$2^{5\times2} = 2^{10} = 1024$$

3. **Propiedad del producto de dos números elevados a una misma potencia**. La multiplicación de dos números elevados a la misma potencia es igual a la multiplicación de esos números elevada a la potencia común: $x^a \times y^a = (x\times y)^a$

   Ejemplo:
   $$4^3 \times 3^3 = (4\times3)^3 = 12^3 = 1728$$

4. **Propiedad del cociente de dos potencias** (donde $x \neq 0$). La división de dos potencias con la misma base, es lo mismo que la base elevada a la resta de los exponentes: $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

   Ejemplo:
   $$\frac{9^5}{9^3} = 9^{5-3} = 9^2 = 81$$

5. **Propiedad de la potencia de un cociente** (donde $y \neq 0$). Una fracción en la que el numerador está elevado a una potencia y el denominador está elevado a la misma potencia, es lo mismo que la fracción elevada a esa potencia. $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

   Ejemplo:
   $$\frac{7^2}{3^2} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$$

6. **Propiedad de la potencia cero**. Todo número elevado a la potencia cero es igual a uno: $x^0 = 1$

Ejemplo:

$$8^0 = 1$$

7. **Propiedad de la potencia uno.** Todo número elevado a la potencia uno es igual a sí mismo: $x^1 = x$

Ejemplo:

$$7^1 = 7$$

8. **Propiedad del recíproco o inverso**. Todo número elevado a la potencia $-a$ es igual al inverso de ese número a la potencia n: $x^{-a} = \left(\frac{1}{x^a}\right)$

Ejemplo:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0.04$$

Radicación

Es la operación inversa a la potencia que es la raíz.

Propiedades de la radicación

1. **Para n par, no esta definida si $x > 0$, es decir, si x es negativo**.
No existe ningún número que al multiplicarse por sí mismo un par de veces dé como resultado un número negativo, debido a que al multiplicar un número por sí mismo, sea este negativo o positivo, el resultado siempre es positivo.

Ejemplo:

$$\sqrt{-36}$$

no está definida para los números reales, porque no existe un número que al multiplicarse por sí mismo tenga como resultado –36. Piensa en 6 o en –6, por ejemplo, al elevarlos al cuadrado obtienes 36. Lo mismo ocurre para la cuarta potencia.

2. **Las raíces del cero son iguales a cero para cualquier n:** $\sqrt[n]{0} = 0$

3. **Las raíces impares de números positivos son positivas:** $\sqrt[n]{x} > 0 \; si \; x > 0 \; y \; n \; es \; impar$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{27} = 3$$

4. **Las raíces impares de números negativos son negativas:** $\sqrt[n]{x} < 0 \; si \; x < 0 \; y \; n \; es \; impar$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{-27} = -3$$

Exponentes racionales

Una expresión radical de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ se puede escribir como una expresión exponencial de la forma $a^{m/n}$.

Ejemplos:

$$\sqrt{25} = 25^{1/2}$$

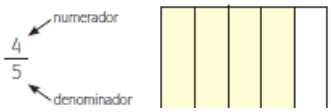
$$\sqrt[4]{2^3} = 2^{3/4}$$

En otras palabras, la raíz de un número elevado a una potencia puede escribirse como el cociente del exponente.

Operaciones con fracciones



Las **fracciones** se componen de **numerador** y **denominador**. El denominador representa la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad, y el numerador es la cantidad que se toma de estas.



El rectángulo del dibujo anterior se ha dividido en 5 partes iguales (denominador) y se han tomado 4 de estas (numerador).

Fracciones equivalentes

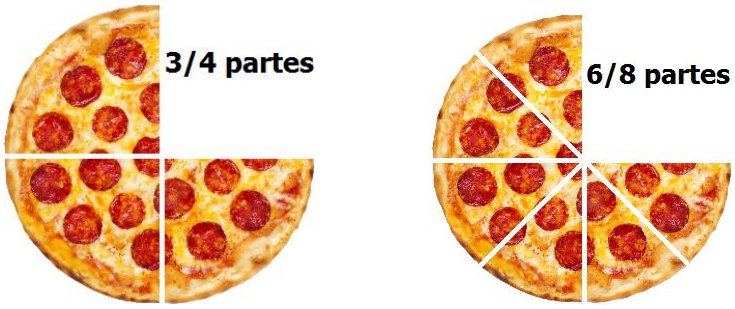
Las **fracciones equivalentes** son aquellas que tienen el mismo valor, aunque parezcan diferentes.

Ejemplo:

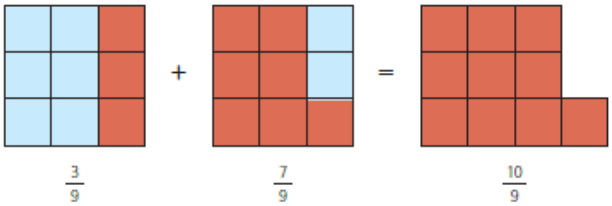
$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Puedes probar que las fracciones anteriores son iguales efectuando las divisiones correspondientes: 3 ÷ 4 = 0.75; del mismo modo: 6 ÷ 8 = 0.75.

También puedes pensarlo como que tres cuartas partes de una pizza es la misma cantidad que seis octavas partes de una pizza del mismo tamaño.



Suma y resta de fracciones



La **suma** (o la **resta**) de fracciones con un denominador común, es un número racional cuyo numerador es la suma (o resta) de los numeradores y cuyo denominador es el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}=\frac{8}{7}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{7}{4}=-\frac{2}{4}$$

Y para dos números racionales cuyo denominador no es común, la suma (o resta) se define de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times d}{b\times d};\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}$$

Multiplicación o producto de fracciones

La **multiplicación** o **producto** de dos fracciones es otro número racional que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times5}{8\times6}=\frac{15}{48}$$

División de fracciones

La **división** de dos números racionales **es otro** número racional que tiene por numerador el producto del numerador del primero con el denominador del segundo, y por denominador el producto del denominador del primero con el numerador del segundo.

Ejemplo:

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{5} = \frac{2 \times 5}{7 \times 3} = \frac{10}{21}$$

Las flechas en la siguiente imagen te pueden ayudar a que no olvides como se efectúan la multiplicación y la división.

$$\frac{4}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{32}{35}$$ Multiplicación

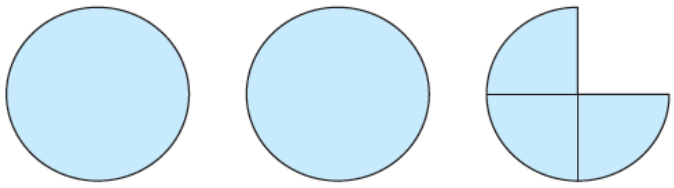
$$\frac{9}{4} \div \frac{7}{3} = \frac{27}{28}$$ División

Números mixtos

Es posible que en ocasiones encuentres números que constan tanto de una parte entera como de una fraccionaria. A un número como estos se le llama **número mixto**.
Un número mixto puede escribirse como fracción si partimos los enteros en las mismas partes que indica el denominador de la parte fraccionaria.
En general, para pasar de un número mixto a una fracción se mantiene el mismo denominador y el numerador será la suma de la multiplicación del entero por el denominador más el numerador del número mixto. $a\frac{b}{c} = \frac{a\acute{}\ c+b}{c}$

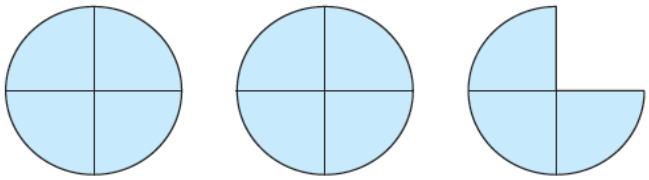
Caso práctico:

si tengo $2\frac{3}{4}$ de pizza, tengo dos pizzas enteras y tres cuartos más de pizza, como se muestra en la siguiente figura:



Si partimos las pizzas enteras en cuartos tendremos la misma cantidad de pizza, pero toda partida en cuartos.

Continuación…



Si contamos los cuartos de pizza de la figura anterior, podemos ver que hay 11 cuartos. Cuatro cuartos de cada pizza entera, más tres cuartos de la otra.

$$4+4+3 \text{ cuartos}$$
$$2\cdot 4+3 \text{ cuartos}$$

Por lo tanto, $2\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4+3}{4}=\frac{11}{4}$

Para pasar una fracción a número mixto se divide el numerador entre el denominador, y el cociente será el entero, el residuo será el numerador y el denominador se mantiene.

Ejemplo:

Convertir $\frac{8}{3}$ en número mixto:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\overline{)\,8} \\ \underline{-6} \\ 2 \end{array}$$

$8 \div 3 = 2$ y sobran 2, entonces:

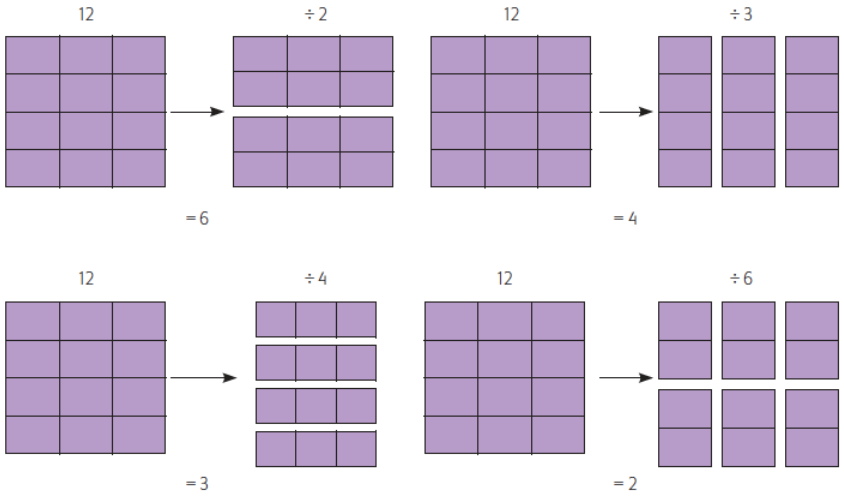
$$\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

Divisibilidad

Cuando una cantidad se puede repartir de manera exacta entre otra, se dice que ésta es divisible entre la otra.
En muchas ocasiones se requiere repartir algo en partes iguales sin que sobre nada, y además, saber de qué tamaño son esas partes en las que se reparte una cantidad. Es por ello que se estudia la teoría de la divisibilidad que nos proporciona las herramientas para poder repartir objetos de forma exacta.
Se dice que a es divisible por b si existe un tercer número c tal que $a=b\cdot c$, para a, b y c números enteros.

Ejemplo:

Por ejemplo, 12 es divisible por $6\left(12=6\acute{}\ 2\right)$, por $4\left(12=4\acute{}\ 3\right)$, por $3\left(12=3\acute{}\ 4\right)$ y por $2\left(12=2\acute{}\ 6\right)$.



Divisores y múltiplos

A los números que son multiplicaciones de otros, se les conoce como **múltiplos**. Si a divide a b, entonces diremos que a es divisible por b. También decimos que b es divisor de a, o que a es múltiplo de b.

También podemos decir que el número entero a es divisible por otro entero b si la división es exacta, es decir, si al realizar la división el residuo es 0.

Por lo tanto, los múltiplos de un número natural son los números que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales.

Por ejemplo, los múltiplos del 7 son: 7, 14, 21, 28…

También decimos que un número es múltiplo de otro si le contiene un número entero de veces. El 21 contiene al 7 tres veces, pues 21 = 7 × 3.

Todo número natural tiene un infinito de múltiplos. Es decir que, los **múltiplos** de un número natural son los números naturales que encontramos al ir saltando ese número de veces a lo largo de todos los naturales, lo que equivale a ir multiplicando por ese número.

Otro ejemplo: Los múltiplos de 6 son los números que encontramos al ir saltando de 6 en 6: 6, 12, 18, 24 y así sucesivamente, hasta el infinito.

Los **divisores** de un número natural son los números naturales que lo dividen. Por ejemplo, los divisores del 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Números primos

Los **números primos** son aquellos que solo son divisibles por sí mismos y por el 1. Los **números compuestos** son los que tienen otros divisores además de sí mismos y la unidad.

Para encontrar los números primos entre el 1 y el 50, usamos la **Criba de Eratóstenes**, para ello seguiremos las instrucciones que se presentan a continuación.

Primero escribe una tabla con todos los números del 1 al 50:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

El 1 no es considerado ni primo ni compuesto, por lo tanto, lo eliminamos de la lista. El 2 es número primo, ¿no es así? Sin embargo, sus múltiplos no lo son pues lo tienen a él como divisor. Entonces elimina del listado todos los números que son pares, es decir, múltiplos de dos.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

El siguiente número primo es el 3, pero sus múltiplos no lo son. Elimina entonces de la tabla los múltiplos de 3 que no se hayan tachado antes, es decir, los múltiplos de 3 que no son pares, como el 9 el 15, etcétera.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

El siguiente número primo es el 5, y también tachamos a sus múltiplos, de los cuales solo quedaban sin tachar el 25 y el 35.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

El siguiente número primo es el 7 y solamente queda un múltiplo suyo por quitar de la lista, el 49, ¡táchalo!

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

El número primo que sigue es el 11 y sus múltiplos previos a 50 ya han sido eliminados. Por lo tanto, los números que quedan son todos primos, es decir que según la Criba de

Eratóstenes los números primos entre 1 y 50 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Números compuestos

Los **números compuestos** se llaman así porque se componen del producto de números primos. Es como si los números primos fueran la materia prima para construir al resto de los números mediante multiplicaciones.

Ejemplo:

- El número 6 se obtiene de multiplicar al 2 y 3.
- El 12 se obtiene al multiplicar el 6 por 2. Por lo tanto, el 12 = 2 × 2 × 3.

Descomposición en factores primos

La **descomposición en factores primos** es el producto de números primos que dan como resultado un cierto número natural. Cada número natural tiene una única descomposición en factores primos. ¿Cómo puedo encontrar la descomposición en factores primos de un número determinado? Se trata de partir al número en los números primos que lo dividen.
Si quiero encontrar la descomposición en factores primos de un número tengo que encontrar los números primos que lo dividen. Empiezo dividiendo por 2 todas las veces que se pueda, sigo con 3, luego con 5 y así sucesivamente, utilizando números primos del menor al mayor hasta que no pueda dividir más.

Ejemplos:

- La descomposición en factores primos del 24 se efectúa así:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

- La descomposición en factores primos de 60 es la siguiente:

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

Por lo tanto: $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

ACTIVIDA:

- ✓ Realiza la actividad 17 sobre **factores primos** de la página 68 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 192 del Apéndice 1.

Mínimo común múltiplo (MCM)

El MCM de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero, es decir, es el número más pequeño que resulta de la multiplicación de cualquiera de los dos números.

Ejemplo:
El MCM de 24 y 36
Los múltiplos de 24 son: 24 (resultado de 24 × 1), 48 (de 24 × 2), **72** (de 24 × 3), 96 (de 24 × 4), etcétera. Los múltiplos de 36 son: 36 (producto de 36 × 1), **72** (de 36 × 2), 108 (36 × 3), etcétera.

El número más pequeño, común a ambas listas de múltiplos es 72; por lo tanto:

MCM (24, 36) = 72

Debemos obtener la descomposición en factores primos de éstos y **tomar a todos los números que aparezcan en al menos una de las descomposiciones, elevado a la potencia que sea la máxima**.

Ejemplo:
Encontrar el MCM de 24 y 36

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$

Aquí aparecen los números 2 y 3 en ambas descomposiciones. Para el 2 la potencia máxima es 3 y para el 3 es 2. Por lo tanto, el MCM se obtiene multiplicando $2^3 \times 3^2 = 72$.

Ejemplo:
Encontrar el MCM de 12, 15 y 16

12	2
6	2
3	3
1	

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

15	3
5	5
1	

$15 = 3 \times 5$

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

El MCM es: $2^4 \times 3 \times 5 = 240$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 18 sobre **Mínimo Común Múltiplo (MCM)** de la página 70 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 192 del Apéndice 1.

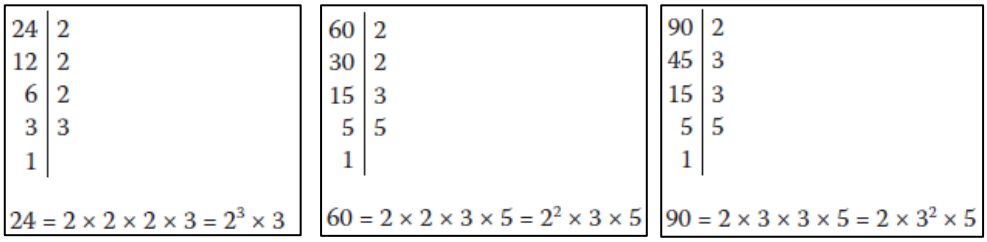
Máximo común divisor (MCD)

El MCD de dos o más números es el número más grande posible que es divisor de todos ellos.

Ejemplo:
El MCD de 24 y 36:
Los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24
Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36
El número más grande que divide a ambos es 12, por lo tanto:
MCD (24, 36) = 12

Debemos obtener la descomposición en factores primos de éstos y **tomar a todos los números que aparezcan en todas las descomposiciones, elevados a la potencia que sea la mínima**.

Ejemplo:
Encontrar el MCD de 24, 60 y 90



El número 2 coincide en las tres descomposiciones y la potencia mínima es 1. El número 3 también coincide en las tres descomposiciones con potencia mínima 1. El número 5 solamente coincide en dos de las descomposiciones y por ello no se considera. Por lo tanto, el

MCD de 24, 60 y 90 es: 2 × 3 = 6

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad **19 sobre Máximo Común Divisor (MCD)** de la página 73 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 192 del Apéndice 1.

Caso práctico:
Si no conocemos la edad de la hermana de Luis, pero sabemos que él tiene 17 años y que tiene cinco años más que ella. La incógnita es la edad de la hermana de Luis. Utilizamos una letra para representar esa cantidad desconocida y entonces podemos escribir la siguiente ecuación:

$$x+5=17$$

donde x es la incógnita que representa, en este caso, la edad de la hermana de Luis. Si mi problema fuera conocer su edad, entonces para resolverlo solo necesito averiguar el valor de la x.

Ecuaciones y propiedades de la igualdad

Una **ecuación** es una igualdad en cuyos miembros hay letras y números relacionados por operaciones aritméticas. A las letras les llamamos incógnitas, y representan cantidades desconocidas.

a) **Propiedad de la suma.** Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que $a = b$, entonces $a + c = b + c$. En otras palabras, puedo sumar el mismo número a los dos lados de la igualdad y seguirá siendo una igualdad.

Ejemplo:

$$3 + 2 = 4 + 1$$

Ambos lados de la ecuación son iguales a 5.
Si sumo 7 de los dos lados, ahora ambos serán iguales a 12.

$$3 + 2 + 7 = 4 + 1 + 7$$

Sumar una cantidad de ambos lados de la ecuación nos permite pasar números de un lado a otro a partir de sumar los **inversos aditivos** de un número.

Ejemplo:
Si tenemos $x + 4 = 15$, entonces sumamos – 4 de ambos lados de la ecuación y lo que sucederá es que del lado izquierdo se eliminará el 4, y del lado derecho aparecerá un -4, pero este lo podemos sumar con el 15. Es decir que el 4 pasará del otro lado de la igualdad con el signo inverso.

b) **Propiedad de la multiplicación.** Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que $a = b$, entonces $a \times c = b \times c$, es decir, puedo multiplicar los dos lados de la igualdad por el mismo número sin afectar la igualdad.

Ejemplo:
Si tenemos:

$$3 + 2 = 4 + 1$$

ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si multiplico por 2 a los dos lados, ahora ambos serán iguales a 10.

$$(3 + 2) \times 2 = (4 + 1) \times 2$$

Multiplicar una cantidad de ambos lados de la ecuación nos será útil para dejar sola a la incógnita cuando se encuentra dividida por un número. Si multiplicamos por el **inverso multiplicativo** de este número, nos dará 1, y entonces $x \times 1 = x$.

Ejemplo:
Si tenemos la ecuación:

$$\frac{x}{5}=6$$

y multiplicamos por 5 a ambos lados de la igualdad,

$$5\times\frac{x}{5}=5\times 6$$

Entonces del lado izquierdo estoy multiplicando por 5 y dividiendo entre 5, y eso es igual a 1. Por lo tanto solo nos queda x, y del lado derecho podemos multiplicar los números que ahí se encuentran, quedando la ecuación $x=6\times 5=30$.

c) **Propiedad de la división.** Si a,b y c son números reales cualesquiera tales que $a=b,$ y $c\neq 0$, entonces $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

Ejemplo:

$$3+2=4+1$$

ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si divido por 2 de los dos lados:

$$\frac{3+2}{2}=\frac{4+1}{2}$$

ahora ambos son iguales a 2.5.

Dividir una cantidad de ambos lados de la ecuación nos ayudara para dejar sola a la incógnita cuando se encuentra multiplicada por un número. Si dividimos por el **inverso multiplicativo** de este número, obtendremos 1 y de nuevo tenemos que $x\times 1=x$.

Ejemplo:
si tenemos la ecuación:
$7x=35$ y dividimos entre 7 de ambos lados de la ecuación, tendremos: $\frac{7x}{7}=\frac{35}{7}$, del lado izquierdo $\frac{7}{7}=1$ y queda la x sola, del lado derecho hacemos la división y quedará entonces $x=5$.

d) **Propiedad de la potencia**. Si a y b son números reales cualesquiera tales que $a=b$, entonces $a^n=b^n$.

Ejemplo:

$$3+2=4+1$$

ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si elevo al cuadrado de los dos lados, ahora ambos son iguales a 25:

$$(3+2)^2=(4+1)^2$$

Esta propiedad es útil cuando encontramos raíces en las ecuaciones.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{x}=5$$

Elevar al cubo a ambos lados de la ecuación nos permite dejar sola a la x pues elevar al cubo y sacar raíz cubica son operaciones inversas y devuelven el mismo número. Por lo tanto: $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=5^3$. Del lado izquierdo obtenemos x , y del lado derecho realizamos la operación: $x=125$.

e) **Propiedad de la raíz.** Si a y b son números reales cualesquiera tales que $a=b$, entonces $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$.

Ejemplo:

$$3+2=4+1$$

ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si obtengo la raíz cuadrada de los dos lados $\sqrt{3+2}=\sqrt{4+1}$, ahora ambos son iguales a $2.236067\ldots$

Esta propiedad nos sirve cuando encontramos potencias en las ecuaciones.

Ejemplo:

$$x^3=512$$

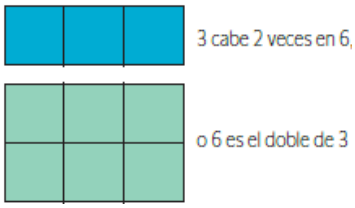
Utilizando el mismo razonamiento que en la propiedad anterior, de que elevar al cubo y sacar raíz cúbica son operaciones inversas y devuelven el mismo número, ahora corresponde obtener la raíz cúbica de ambos lados de la ecuación. Por lo tanto: $\sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{512}$, del lado izquierdo obtenemos x, y del lado derecho realizamos la operación y la ecuación queda $x=8$.

Razones y proporciones

Una **razón** entre dos cantidades es una comparación entre éstas con el fin de determinar cuántas veces cabe una en la otra, y se obtiene al dividir una cantidad entre la otra.

Ejemplo:
Comparar las magnitudes 6 y 3,

realiza la siguiente división: $6 \div 3 = 2$
el resultado me indica que 6 es 2 veces mayor que 3 ; o que 3 cabe 2 veces en 6 o, si divido $3 \div 6 = \frac{1}{2}$ el resultado me indica que 3 es la mitad de 6 .



Propiedades de una proporción

Una **razón** es la relación que existe entre dos magnitudes. En la medida en que una de estas varía, la otra deberá variar también para que la relación entre ellas se mantenga. Cuando dos razones son iguales, aunque tengan diferentes números, tendremos una **proporción**. Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

Ejemplo:
la razón de $7:5$ es igual que la de $21:15$, por lo tanto $\frac{7}{5} = \frac{21}{15}$. La expresión anterior es una proporción y se lee "7 es a 5 como 21 es a 15".

En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ llamamos extremos a las cantidades a y d ; denominamos medios a las cantidades b y c .

La siguiente propiedad de las proporciones es la más importante porque es la más utilizada:
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces se cumple que $ad = bc$.

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{15} \text{ cumple que:}$$
$$4 \times 15 = 5 \times 12$$
$$60 = 60$$

Otras propiedades importantes son:

1. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Ejemplo:

$$\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$$

Si intercambiamos al 4 y al que 12, también se cumple

$$\frac{3}{12}=\frac{4}{16}$$

2. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

Ejemplo:

$$\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$$

Si intercambiamos los numeradores con los denominadores de ambas razones, también se cumple que $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$

3. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

Ejemplo:

$$\frac{9}{5}=\frac{36}{20}$$

Si mantenemos los mismos denominadores (5 y 20 respectivamente) pero sumamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el numerador ($9+5=14$ y $36+20=56$ respectivamente), también se cumple que $\frac{14}{5}=\frac{56}{20}$

4. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

Ejemplo:

$$\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$$

Si mantenemos los mismos denominadores (21 y 3 respectivamente) pero restamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el numerador ($28-21=7$ y $4-3=1$ respectivamente), también se cumple que $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$

5. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

Ejemplo:

$$\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$$

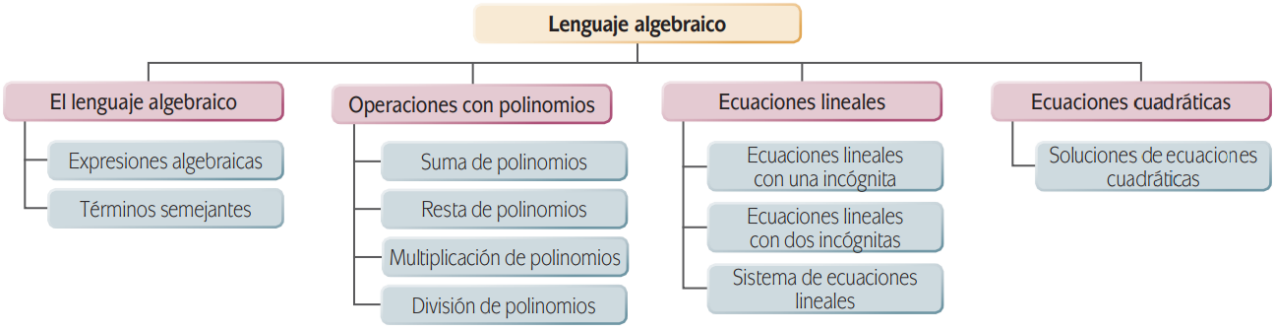
y sumamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el numerador ($5+2=7$ y $15+6=21$ respectivamente) restamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el denominador ($5-2=3$ y $15-6=9$ respectivamente), también se cumple que $\frac{7}{3}=\frac{21}{9}$

UNIDAD 2. LENGUAJE ALGEBRAICO

¿Qué voy a aprender y cómo?
Como habrás notado en la Unidad 1, para iniciar un negocio se debe trabajar muy duro y planificar cada etapa con el fin de obtener beneficios. Para comenzar la planeación es primordial identificar qué se tiene, qué se necesita, qué falta y cómo se puede conseguir lo necesario para llegar a buen término. En la unidad anterior, los procedimientos y conceptos aritméticos te permitieron resolver situaciones problemáticas, sin embargo, en ocasiones, hay problemas que involucran cantidades desconocidas y en los que la aritmética resulta insuficiente. ¿Cómo solucionarlas entonces? ¿Cómo enfrentar esos problemas cuando se tienen cantidades conocidas y desconocidas? Mediante el **álgebra**, la parte de la matemática que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades y que se encarga de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) utilizando símbolos (a, x, y) en lugar de números (1, 2, 9). El uso de símbolos permite hacer referencia a números desconocidos (incógnitas), lo que posibilita el desarrollo de ecuaciones y el análisis correspondiente a su resolución. De este modo se pueden utilizar **expresiones algebraicas** para resolver una gama más amplia de situaciones problemáticas.

¿Con qué propósito?
El propósito de esta unidad es que te enfrentes a la resolución de situaciones problemáticas utilizando **el lenguaje algebraico** y diferentes **métodos algorítmicos.**

¿Qué saberes trabajaré?
El eje de tu trabajo es el análisis y la solución de problemas diversos con el álgebra. En primer lugar, aprenderás a manejar el **lenguaje algebraico** y a formular **expresiones algebraicas**, de tal manera que puedas convertir con facilidad el lenguaje común a algebraico y viceversa. Después, estudiarás cómo resolver operaciones con **polinomios** y **factorizar expresiones algebraicas**, de tal manera que puedas transformar y simplificar dichas operaciones para encontrar su solución.
También conocerás diversos métodos para resolver **ecuaciones** de dos tipos: **lineales y cuadráticas**, así como **sistemas de ecuaciones lineales.**
Para terminar, te familiarizarás con la **graficación de ecuaciones** como alternativa para resolverlas.
A lo largo de todo el proceso aplicarás una metodología de **solución de problemas** que te permitirá abordar las situaciones aquí propuestas para enfrentarte a problemáticas de tu vida cotidiana. Para llegar a buen término es básico que asumas una actitud de autonomía, pues trabajarás por tu propia cuenta; que seas analítico al establecer las relaciones de las variables involucradas en la situación; y que te muestres creativo y sistemático en la instrumentación de la metodología de resolución de problemas.



En álgebra, a los datos desconocidos que se involucran en los problemas se les conoce como incógnitas y se expresan dentro de las operaciones mediante letras o literales. A ese lenguaje que se genera al utilizar letras y números para la resolución de problemas se le conoce como lenguaje algebraico.

El lenguaje algebraico

Expresiones algebraicas

A las expresiones que involucran operaciones con números desconocidos se les denomina **expresiones algebraicas**. Cuando éstas llevan el signo que denota igualdad se les conoce como **ecuaciones** y son éstas las que permiten solucionar problemas.
Una expresión algebraica se forma a partir de términos algebraicos separados entre sí por los signos de $+$ y –.

$$4x^2 - 3y$$

2 términos

A un término algebraico lo conforman un coeficiente numérico y una parte literal. El **coeficiente numérico** es la cantidad numérica que se encuentra a la izquierda de la parte literal, y que indica la cantidad de veces que ésta se debe sumar o restar dependiendo del signo que tenga.

Coeficiente numérico → $5\ \underbrace{x^2 y}_{\text{parte literal}}$

Operaciones con polinomios

Suma de polinomios

Para sumar dos o más polinomios simplemente se unen con un signo $+$ y se reducen los términos semejantes. También suelen colocarse uno debajo del otro, de modo que los términos semejantes queden en columna, para facilitar la reducción de éstos.

Ejemplo:

- Sumar los polinomios: $5x-4y+3$ y $7x+2y-9$,
  Tenemos que: $5x-4y+3+7x+2y-9=12x-2y-6$

- Sumar los polinomios: $a^2b-6b+3a^2$, $4a^2+2b^2$ y
  $7a^2b-3b-5b^2-10$

$$a^2b-6b+3a^2+4a^2+2b^2+7a^2b-3b-5b^2-10=$$
$$8a^2b-9b+7a^2-3b^2-10$$

Resta de polinomios

Para restar dos o más polinomios restamos del minuendo cada uno de los términos del sustraendo. Para hacerlo, primero debemos anotar el minuendo y, a continuación escribiremos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos; después reducimos términos semejantes.

Ejemplo:

- Restar al polinomio $-8a+6b+c$ el polinomio $5a+2b-4c$,
  Tenemos que: $-8a+6b+c-5a-2b+4c=-13a+4b+5c$
- Si queremos restarle al $12xy^3-8x^2+x^3y$ el polinomio $6x^2-2x^3y-4y^2$
  Tenemos que:

$$\begin{array}{r} 12xy^3-8x^2+x^3y \\ -\quad 6x^2-2x^3y-4y^2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 12xy^3-8x^2+x^3y \\ +\quad -6x^2+2x^3y+4y^2 \\ \hline 12xy^3-14x^2+3x^3y+4y^2 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios

a) Multiplicación de monomios: Para multiplicar dos o más monomios se multiplican los coeficientes numéricos y las literales aplicando las reglas de los signos y las leyes de los exponentes.

Ejemplo:

$$5a^2b^5\cdot 7ab^2=5\cdot 7\cdot a^{2+1}\cdot b^{5+2}=35a^3b^7$$

b) Multiplicación de un monomio por un polinomio

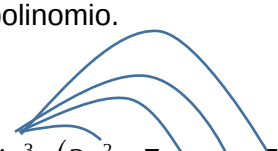
Para multiplicar un monomio por un polinomio aplicamos la propiedad distributiva, la cual indica que el producto de un número por la suma de los otros dos, es igual a la suma de los productos de cada uno de los sumandos por ese número, es decir,

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Ejemplo:

$$4x^3y\left(2x^2-7xy+x-5\right)$$

Para multiplicar el monomio $4x^3y$ por el polinomio $2x^2-7xy+x-5$, aplico la propiedad distributiva y multiplico $4x^3y$ por cada uno de los términos del polinomio.



$$4x^3y\left(2x^2-7xy+x-5\right)=\left(4x^3y\right)\left(2x^2\right)+\left(4x^3y\right)\left(-7xy\right)+\left(4x^3y\right)\left(x\right)+\left(4x^3y\right)\left(-5\right)$$

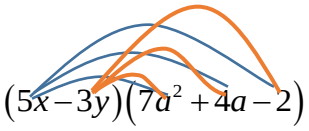
Por lo tanto:

$$4x^3y\left(2x^2-7xy+x-5\right)=8x^5y-28x^4y^2+4x^4y-20x^3y$$

c) Multiplicación de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por todos los términos del segundo y sumarlos o restarlos dependiendo de la operación que enlace los términos del primer polinomio.

Ejemplo:



$(5x-3y)(7a^2+4a-2)$

Para multiplicar el polinomio $5x-3y$ por el polinomio $7a^2+4a-2$,

$$\begin{aligned}&(5x-3y)(7a^2+4a-2)\\&=5x(7a^2+4a-2)-3y(7a^2+4a-2)\\&=35a^2x+20ax-10x-21a^2y-12ay+6y\end{aligned}$$

División de polinomios

La división de polinomios también se presenta en diversas formas:

a) División de un monomio entre un monomio

Para dividir un monomio entre otro, se dividen los coeficientes numéricos y se aplican las leyes de los exponentes.

Ejemplos:

- $\dfrac{6x^5}{3x^2}=\left(\dfrac{6}{3}\right)x^{5-2}=2x^3$
- $\dfrac{-2a^5b}{5a^3b^4}=\dfrac{-2aaaaab}{5aaabbbb}=-\dfrac{2a^2}{5b^3}$
- $\dfrac{-20m^2}{-4m^7n^3}=\dfrac{5}{m^5n^3}$
- $\dfrac{9x}{45x^3y^2}=\dfrac{1}{5x^2y^2}$

b) División de un polinomio entre un monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio se aplica la propiedad distributiva y se divide cada término entre el monomio.

Ejemplos:

- $\dfrac{12a^4+16a^2-8a}{4a}=\left(\dfrac{1}{4a}\right)\left(12a^2+16a^2-8a\right)=\dfrac{12a^4}{4a}+\dfrac{16a^2}{4a}-\dfrac{8a}{4a}=3a^3+4a-2$
- $\dfrac{2x^2y^2-15ax-9y^5}{3x^4y}=\dfrac{2x^2y^2}{3x^4y}-\dfrac{15ax}{3x^4y}-\dfrac{9y^5}{3x^4y}=\dfrac{2y}{3x^2}-\dfrac{5a}{x^3y}-\dfrac{3y^4}{x^4}$

c) División de polinomios.

$$\underset{\text{dividendo}}{\left(3x^4+x^3-x^2-1\right)}\div\underset{\text{divisor}}{\left(x-2\right)}$$

Para dividir dos polinomios se procede de manera similar a la división aritmética. Se ordenan los polinomios con respecto a una misma literal, de mayor a menor exponente, si el polinomio no es completo se dejan los espacios de los términos que faltan, y se coloca un 0 en ese lugar.

Ejemplos:

$$\left(3x^4+x^3-x^2-1\right)\div\left(x-2\right)$$

1. En el dividendo falta el término $x^1=x$. Debemos dejar ese espacio y poner un 0 en su lugar. Acomodamos al dividendo y al divisor como se muestra a continuación:

$$x-2\overline{)3x^4+x^3-x^2+0-1}$$

2. Obtener el primer término del cociente que se obtiene dividiendo el primer término del dividendo entre el primer miembro del divisor, y se coloca arriba. Es decir, efectuando $\frac{3x^4}{x}=3x^3$, y el resultado se coloca arriba, encima del término semejante a éste del dividendo:

$$\begin{array}{r} 3x^3 \\ x-2\overline{)3x^4+x^3-x^2+0-1} \end{array}$$

3. Luego se multiplica ese primer término del cociente por todos los términos del divisor, se coloca este producto debajo del dividendo y se resta del dividendo.

$$\begin{array}{r} 3x^3 \\ x-2\overline{)3x^4+x^3-x^2+0-1} \\ \underline{-3x^4+6x^3} \\ 0+7x^3 \end{array}$$

Observa que al producto de $3x^3\left(x-2\right)=3x^4-6x^3$, se le cambia el signo antes de colocarlo debajo del dividendo, y luego se suma. Después se baja el siguiente término del dividendo al lado de lo que restó, en este caso, $-x^2$.

4. El segundo término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del resto (resultado del paso anterior), entre el primer término del divisor, es decir efectuando $\frac{7x^3}{x}=7x^2$, y el resultado se coloca arriba; una vez más, se multiplica este segundo término del cociente por todos los términos del divisor, se coloca este producto debajo del dividendo parcial y se resta de éste.

$$\begin{array}{r} 3x^3+7x^2 \\ x-2\overline{)3x^4+x^3-x^2+0-1} \\ \underline{-3x^4+6x^3} \\ 7x^3-x^2 \\ \underline{-7x^3+14x^2} \\ 0+13x^2 \end{array}$$

Continuación…

Se baja el 0, que es el término que sigue del dividendo, al lado del resto y se divide, y se coloca arriba como parte del cociente. Se multiplica por el divisor y se resta:

$$\begin{array}{r} 3x^3+7x^2+13x \\ x-2\overline{)\,3x^4+x^3-x^2+\ 0\ -\ 1} \\ \underline{-3x^4+6x^3} \\ 7x^3-x^2 \\ \underline{-7x^3+14x^2} \\ 13x^2+0 \\ \underline{-13x^2+26x} \\ 26x \end{array}$$

5. Se continua así hasta que el resto sea cero o un dividendo parcial cuyo primer término no pueda ser dividido por el primer término del divisor. Cuando esto ocurre, el resto será el residuo de la división.

$$\begin{array}{r} 3x^3+7x^2+13x+26 \\ x-2\overline{)\,3x^4+x^3-x^2+\ 0\ -\ 1} \\ \underline{-3x^4+6x^3} \\ 7x^3-x^2 \\ \underline{-7x^3+14x^2} \\ 13x^2+0 \\ \underline{-13x^2+26x} \\ 26x-1 \\ \underline{-26x+52} \\ 51 \end{array}$$

$3x^3+7x^2+13x+26$ es el cociente, o resultado; 51 es el residuo.

Ecuaciones lineales

Una **ecuación es lineal o de primer grado** cuando las incógnitas no están elevadas a ninguna potencia, es decir, que su exponente es 1.

Ejemplo:

$$7x+3=9x-3$$

$$6x-4y=30$$

Las ecuaciones lineales pueden tener una o más incógnitas; a continuación aprenderás a resolver ambos tipos.

Una **ecuación lineal o de primer grado con una incógnita** es aquella que puede escribirse en la forma $ax+b=c$, donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$.

Ejemplo:

$$7x+3=38$$

$$6(3x-1)-2x=2(2x-5)-8$$

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita se resuelven despejando la incógnita, usando las propiedades de la igualdad.

Ejemplo:

Resolver: $5x+4=6x-3$

Esto quiere decir que los términos $5x$ y $6x$, 4 y -3, tendrían que encontrarse en el mismo lado de la ecuación para poderse sumar. Por lo tanto, necesitamos mover al $6x$ y al 4 para tener a los semejantes del mismo lado. Esto se logra mediante las **propiedades de la igualdad** que me permiten agregar términos a la ecuación, siempre y cuando los agregue de ambos lados para no alterar el valor de la misma.

Piensa que una ecuación es como una balanza que queremos mantener equilibrada, lo que agreguemos de un lado, lo debemos agregar también del otro para que el equilibrio se mantenga.



Si sumo $-6x$ de ambos lados de la ecuación, $6x$ desaparecerá del lado derecho:

$$5x+4-6x=6x-3-6x$$

Continuación…

Al eliminar el término 6x del lado derecho de la ecuación, queda:

$$5x+4-6x=-3$$

Del mismo modo, si sumo –4 de ambos lados de la igualdad, entonces ésta queda:

$$5x+4-6x-4=-3-4,$$

el 4 desaparecerá del lado izquierdo y quedará así:

$$5x-6x=-3-4,$$

ahora reduzco los términos semejantes y la ecuación queda:

$$-1x=-7$$

o, lo que es lo mismo: $-x=-7$.

Divido entre -1 ambos lados de la igualdad y queda el valor de x ,

$$x=7$$

que es la solución de la ecuación.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 9 sobre **ecuaciones lineales** de la página 123 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 215 del Apéndice 1.
- ✓ Revisa el problema 2 de la página 124.

Ecuación lineal con dos incógnitas; es de la forma $ax+by=c$ donde x y y son incógnitas, y a,b y c son números conocidos diferentes de cero.

Ejemplo:

$$2x+y=18$$

$$3x-4y=13$$

A la forma de las ecuaciones $ax+by=c$ se le conoce como **forma general**.

Las **soluciones de una ecuación lineal** con dos incógnitas son los pares de números x y y, que hacen que la igualdad sea cierta.

Ejemplo:

$$3x+y=5$$

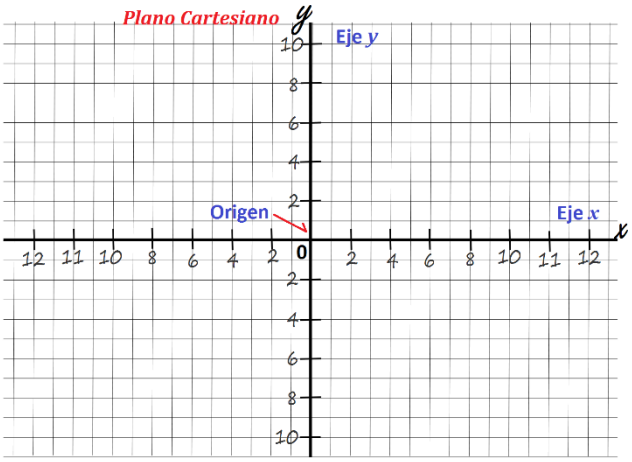
Para esta ecuación los valores de $x=1$ y $y=2$, es una solución, pues si sustituimos esos valores en la ecuación, se cumplirá la igualdad:

$$3(1)+2=5$$

Gráficas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Las gráficas de las ecuaciones lineales son líneas rectas en el **plano cartesiano**. Para trazar la recta que corresponde a una ecuación lineal debemos localizar al menos las coordenadas de algunos puntos que sean solución de la ecuación. Para ello, despejamos y y asignamos valores a x, sustituimos en la ecuación y obtenemos el valor de y que corresponde a esa x para que la pareja sea solución.

El **plano cartesiano** está formado por dos rectas numéricas, una horizontal, o eje x, y otra vertical, o eje y, que se cortan en un punto llamado **origen**, que representa al punto $(0,0)$



En el plano cartesiano puedo localizar la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados. Las coordenadas se forman asociando un valor del eje X y uno del eje Y, respectivamente, es decir, un punto con valores (x, y).

Bastan dos puntos para trazar una recta, por lo que con encontrar dos soluciones (x, y), será suficiente para poder trazar la recta que representa a una ecuación en el plano cartesiano. Sin embargo, es conveniente obtener más de dos puntos (al menos tres) para corroborar que el resultado es correcto.

Ejemplo:

$$2x - y = 5$$

Despejamos y sumando $-2x$ de ambos lados de la igualdad y nos queda:

$$-y = 5 - 2x$$

dividiendo entre -1:

$$y = -5 + 2x$$

ahora damos valores a x, por ejemplo $-1, 0, 1, 2$ y sustituimos los valores en la ecuación.
Sustituyendo los valores de x en la ecuación:

x	y $y = -5 + 2x$
0	$y = -5 + 2(0) = -5 + 0 = -5$
1	$y = -5 + 2(1) = -5 + 2 = -3$
2	$y = -5 + 2(2) = -5 + 4 = -1$
-1	$y = -5 + 2(-1) = -5 - 2 = -7$

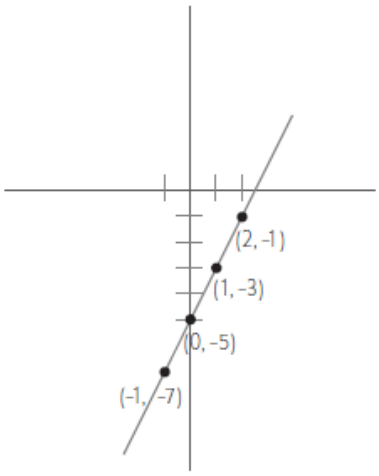
Lo que significa que la pareja de números:
$x = 0$ y $y = -5$ es solución de la ecuación.
$x = 1$ y $y = -3$ es solución de la ecuación.
$x = 2$ y $y = -1$ es solución de la ecuación.
$x = -1$ y $y = -7$ es solución de la ecuación.

En el siguiente cuadro se muestran las parejas de números encontradas:

x	y
0	–5
1	–3
2	–1
–1	–7

continuación…

Entonces, la primera pareja de valores que se obtiene representa al punto $(0,-5)$ en el plano cartesiano. Por ser $x=0$, no avanzo sobre el eje x, pero avanzo 5 unidades hacia abajo sobre el eje y. La segunda pareja representa al punto $(1,-3)$ por lo que avanzo una unidad a la derecha y 3 hacia abajo. Y así sucesivamente, localizo a todas las parejas de valores en el plano cartesiano.



La recta que une esos puntos es la que representa a la ecuación:

$$2x-y=5$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 11 sobre **plano cartesiano** de la página 123 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 215 del Apéndice 1.

Sistema de ecuaciones lineales

A un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas se le conoce como sistema de ecuaciones. Existen muchas situaciones cotidianas en las que nos encontramos con dos ecuaciones con dos incógnitas. Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas son dos ecuaciones en las que las incógnitas deben tomar el mismo valor en ambas. Resolverlo consiste en determinar los valores de las dos incógnitas que cumplen simultáneamente las dos igualdades.

Al considerar juntas ambas ecuaciones para formar el sistema, solamente puede existir un par de números x y y que cumplan las dos a la vez. A ese par de números se les llama **solución del sistema de ecuaciones.**

Ejemplo:

$$x+y=10$$
$$x-y=2$$

Si analizamos cada una de las ecuaciones que componen el sistema, por separado, encontraríamos infinitas soluciones.
Analizando la primera ecuación, encontraremos una enorme cantidad de parejas de números que suman 10. Por ejemplo: $x=8$ y $y=2$, o $x=-5$ y $y=15$ y $x=74$ y $y=-64$, etcétera.
Si, por otro lado, analizamos la segunda ecuación, encontraremos también una enorme cantidad de pares de números cuya resta sea 2. Por ejemplo: $x=9$ y $y=7$, o $x=-6$ y $y=-8$ y $x=67$ y $y=65$, etcétera.

La solución para este sistema de ecuaciones es $x=6$ y $y=4$, pues es la única pareja de valores que satisface ambas ecuaciones a la vez. Es decir:

$$6+4=10$$
$$6-4=2$$

Para encontrar los valores que satisfacen un sistema de ecuaciones existen varios métodos para hacerlo. A continuación mencionaremos algunos de ellos.

Método de sustitución.

Si tenemos el sistema de ecuaciones: $\begin{aligned} 6n+3m&=159 \\ 2n+8m&=228 \end{aligned}$

Para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**, se siguen los siguientes pasos:

1. **Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones**. Podemos despejar tanto a n como a m, de la primera o de la segunda ecuación.

   Ejemplo:

   $$6n+3m=159$$

   Si despejamos a m de la primera ecuación, sumando $-6n$ y dividiendo entre 3 de ambos lados de la ecuación, obtenemos:

   $$m=\frac{159-6n}{3}$$

2. **Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación**, obteniendo una ecuación con una sola incógnita, es decir, que en la segunda ecuación, en donde antes decía m, ahora escribo, $\frac{159-6n}{3}$, quedando: $2n+8\left(\frac{159-6n}{3}\right)=228$.

   ¡Atención! Esta nueva ecuación solamente tiene una incógnita, n, y tú ya sabes despejar este tipo de ecuaciones.

3. **Se resuelve la ecuación**. Resolvemos el lado izquierdo de la ecuación:

$$\left(\frac{3}{3}\right)2n+8\left(\frac{159-6n}{3}\right)=228$$

$$\frac{6n+8(159-6n)}{3}=228$$

$$\frac{6n+1272-48n}{3}=228$$

$$\frac{1272-42n}{3}=228$$

Multiplicamos por 3 a ambos lados de la ecuación:

$$1272-42n=684$$

Sumamos -1272 de ambos lados de la ecuación:

$$1272-1272-42n=684-1272$$

$$-42n=-588$$

Dividimos entre -42 a ambos lados de la ecuación:

$$n=\frac{-588}{-42}$$

$$n=14$$

4. **El valor obtenido de n se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.** Es decir en: $m=\frac{159-6n}{3}$

$$m=\frac{159-6(14)}{3}=\frac{159-84}{3}=\frac{75}{3}=25$$

5. Los dos valores obtenidos, $n=14$ y $m=25$, constituyen la solución del sistema.

Método de igualación

Para resolver un sistema por el **método de igualación** se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan sus valores.
Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.

$$3x-4y=-6$$

$$2x+4y=16$$

1. **Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones**. Podemos despejar a x o a y, siempre y cuando sea a la misma en ambas ecuaciones. Despejemos a x de la primera ecuación: $x=\frac{-6+4y}{3}$

   Ahora despejemos x de la segunda ecuación: $x=\frac{16-4y}{2}$

2. **Se igualan las dos expresiones**, para obtener una ecuación con una incógnita (si ambas son iguales a x, entonces son iguales entre sí).

$$\frac{-6+4y}{3}=\frac{16-4y}{2}$$

¡Atención! Esta nueva ecuación solamente tiene una incógnita, y, ¡ya puedes resolverla!

3. **Se resuelve la ecuación**. Multiplicamos por 3 y por 2 a ambos lados de la ecuación:

$$2(-6+4y)=3(16-y)$$

$$-12+8y=48-12y$$

Sumamos $12y$ y 12 de ambos lados de la ecuación:

$$-12+8y+12y+12=48-12y+12y+12$$

Reducimos términos semejantes:

$$20y=60$$

Dividimos entre 20 a ambos lados de la ecuación:

$$y=3$$

4. **El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita**. Podemos sustituir el valor encontrado de y tanto en $x=\frac{-6+4y}{3}$ como en $x=\frac{16-4y}{2}$

Sustituyamos en la primera de éstas:

$$x=\frac{-6+4(3)}{3}=\frac{-6+12}{3}=\frac{6}{3}=2$$

¡Y tenemos ya el valor de ambas incógnitas!

Método Gráfico

El **método gráfico** consiste en trazar las rectas que representan gráficamente a las dos ecuaciones lineales. De esta manera, las coordenadas del punto de intersección (x,y) de dichas rectas, es la solución del sistema. Por ejemplo, usemos este método para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x+y=5$$

$$2x-y=1$$

Recuerda que para trazar la gráfica de la primera ecuación debemos despejar a y y sustituir valores para x:

$$y=5-x$$

Para $x=0, x=1, x=2$, los valores correspondientes de y se muestran a continuación:

x	y
0	5
1	4
2	3

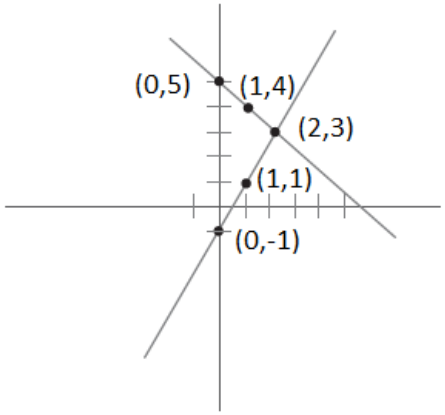
Despejamos y en la segunda ecuación:

$$y=-1+2x$$

Para $x=0, x=1, x=2$, los valores correspondientes de y son los siguientes:

x	y
0	-1
1	1
2	3

Representamos gráficamente a ambas ecuaciones en el mismo plano cartesiano como se muestra a continuación:



Las rectas se cruzan en el punto $(2,3)$. Este punto es la solución del sistema de ecuaciones: $x=2$ y $y=3$.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 12 sobre resolución de **ecuaciones por el método de sustitución** de la página 141 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs.., 201 y 202 el Apéndice 1.

Ecuaciones cuadráticas

En muchas ocasiones nos encontramos con situaciones en las cuales la relación entre las cantidades no es lineal y, por lo tanto, no podemos utilizar ecuaciones lineales para modelarlas.
A este tipo de ecuaciones se les conoce como **ecuaciones cuadráticas**.
Una **ecuación cuadrática o de segundo grado** es una expresión de la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

donde x es la incógnita, a, b y c son números reales cualesquiera, con $a \neq 0$. Esta se conoce como la **forma general de la ecuación cuadrática**.

¡Atención! Una ecuación que no está expresada en la forma general, se puede llevar a esta forma mediante operaciones algebraicas y reducción de términos.

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Existen varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas, es importante que conozcas algunos de ellos, pues nos sirven para simplificar las ecuaciones cuadráticas y, de este modo, encontrar la solución.

Factorización

Factorizar una expresión algebraica es escribirla como el producto de sus factores.

Ejemplo:
La expresión:

$$a^2-36$$

Se puede escribir como el producto de dos factores:

$$(a+6)(a-6)$$

Para verificarlo, puedes efectuar la multiplicación de esos factores y verás que, después de reducir términos semejantes, se obtiene la expresión original.

$$(a+6)(a-6)=a^2-6a+6a-36=a^2-36$$

De modo que factorizar es realizar el proceso opuesto a multiplicar. Partimos de una expresión que puede ser el resultado de un producto y nos interesa saber qué factores dan ese resultado al multiplicarse.

- Multiplicar: $(2)(3)=6$
  Factorizar: $6=(2)(3)$
- Multiplicar: $2x(a+b)=2ax+2bx$
  Factorizar: $2ax+2bx=2x(a+b)$

Factorización por factor común

Esta factorización se puede aplicar cuando cada uno de los términos de un polinomio tienen un factor común. Ese factor común será el máximo común divisor de todos los términos.

Ejemplo 1:
La expresión:

$$ab+ac$$

La expresión tiene dos términos, ab y ac, que tienen un factor común entre ellos, a, y ese factor multiplica a ambos términos. Divido ambos términos entre ese factor y lo coloco multiplicando a la suma de los términos que quedan de esa división: $ab+ac=a(b+c)$.

Ejemplo 2:
La expresión:

$$9x^2y^3+15x^3y^2-12xy^5$$

Primero analizamos a los coeficientes numéricos y buscamos el máximo común divisor de éstos. El MCD $(9,15,12)=3$

Luego analizamos las partes literales. Al igual que con los números, hay que buscar el exponente máximo común a todos los factores para cada letra. En el caso de la x, el exponente máximo común es 1, es decir, que todos los términos tienen al menos una x. En el caso de la y, el exponente máximo común es 2, es decir, que todos los términos tienen al menos y^2.

Por lo tanto, el factor común, o máximo común divisor es $3xy^2$. Para factorizar, el factor común se escribe afuera, pues multiplica a cada uno de los términos; dentro del paréntesis escribo tres términos que son los que resultan de dividir a cada uno de los términos originales entre el factor común.

$$9x^2y^3+15x^3y^2-12xy^5=3xy^2\left(\frac{9x^2y^3}{3xy^2}+\frac{15x^3y^2}{3xy^2}-\frac{12xy^5}{3xy^2}\right)$$

$$=3xy^2\left(3xy+5x^2-4y^3\right)$$

Factorización de diferencias de cuadrados

Dos **binomios conjugados** son aquellos que solamente se diferencian entre sí por un signo de la operación, es decir $(a+b),\ (a-b)$. Por ejemplo $\left(5x^3-3y^2\right)\left(5x^3+3y^2\right)$, son binomios conjugados.

Como habrás notado, al multiplicar binomios conjugados sucede lo siguiente:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$$

Al reducir términos semejantes, los dos términos de en medio se eliminan y obtendremos:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo:
Si tenemos los siguientes binomios conjugados:

$$\left(5x^3-3y^2\right)\left(5x^3+3y^2\right)=$$

$$25x^6+15x^3y^2-15x^3y^2-9y^4=$$

$$25x^6-9y^4$$

Por lo tanto, cuando tengamos dos binomios conjugados, no hace falta que efectuemos todos los pasos de la multiplicación: simplemente escribimos los términos de los extremos, que son los cuadrados de los términos de los binomios, separados por un signo de –.

Ejemplos:

$$(4m+5n)(4m-5n)=16m^2-25n^2$$

$$(x+z)(x-z)=x^2-z^2$$

A este tipo de multiplicaciones en las que el resultado que se obtiene sigue ciertas reglas fijas, se les llama **productos notables**, pues una vez que los entendemos y nos los aprendemos no tenemos que realizar todos los pasos del producto, sino simplemente poner el resultado que es conocido.
Al resultado del producto de binomios conjugados se le llama **diferencia de cuadrados.**

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Diferencia de cuadrados

Cuando queremos factorizar una diferencia de cuadrados, el resultado será el producto de dos binomios conjugados. ¿Cuáles? Aquellos que son las raíces cuadradas de los términos de la expresión a factorizar, es decir, la operación al revés.

Ejemplos:
Factorizar la siguiente expresión algebraica:

$$36m^4-25p^2$$

encontrar los números cuyos cuadrados de los dos términos de la expresión anterior, es decir, sacar su raíz cuadrada.

$$36m^4=\left(6m^2\right)^2$$

$$25p^2=\left(5p\right)^2$$

Entonces la factorización quedará de la siguiente manera:

$$36m^4-25p^2=\left(6m^2+5p\right)\left(6m^2-5p\right)$$

¡Atención!
No importa el orden en que escribamos los binomios conjugados. Recuerda que el orden de los factores no altera el producto. Podemos escribir primero el que lleva –, y luego el que lleva +, o viceversa.

Factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos

Cuando elevo al cuadrado un binomio, es decir, cuando multiplico dos binomios iguales, obtengo un resultado que también es conocido, o sea, que también es un producto notable.

Por ejemplo:

$$(a+b)(a-b),\left(5x^3-3y^2\right)\left(5x^3+3y^2\right)$$

Al elevar binomios al cuadrado, o sea, al multiplicar dos binomios iguales, sucede lo siguiente:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$=a^2+ab+ab+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

Si los binomios conjugados se restan tenemos:

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$
$$=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

Al resultado de binomios al cuadrado, se le llama **trinomio cuadrado perfecto**, y éste también es un producto notable:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

Sucede lo mismo con cualquier par de binomios iguales elevados al cuadrado.

$$(5x^3-3y^2)^2=(5x^3-3y^2)(5x^3-3y^2)$$
$$=25x^6-15x^3y^2-15x^3y^2+9y^4$$
$$=25x^6-30x^3y^2+9y^4$$

Por lo tanto, cuando tengamos que multiplicar un binomio al cuadrado, es decir dos binomios iguales, no hace falta que efectuemos todos los pasos de la multiplicación: **simplemente escribimos el cuadrado del primer término más el doble del producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.**

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 14 sobre **factorización** de la página 153 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 202 del Apéndice 1.

Factorización de Trinomios de la forma: x^2+bx+c

Analicemos ahora los productos de dos binomios que tengan la forma: $x+a$, donde x es la incógnita y a es un número cualquiera.

Ejemplos:

- $(x+8)(x-4)=x^2+8x-4x-32$

Reduciendo términos semejantes (los dos de en medio son semejantes):

$$(x+8)(x-4)=x^2+4x-32$$

- $(x-7)(x+5)=x^2+5x-7x-35=x^2-2x-35$
- $(x-6)(x-9)=x^2-6x-9x+54=x^2-15x+54$
- $(x+1)(x-5)=x^2-5x+x-5=x^2-4x-5$

Si observamos los ejemplos anteriores los productos siguen un patrón, y por tanto podemos ahorrar pasos para efectuarlos.

Ejemplo:

$$(x+4)(x-7)=x^2-3x-28$$

El primer término es x^2, el segundo término se encuentra sumando $4-7=-3$ y multiplicando por x, y el tercer término se encuentra multiplicando $(4)(-7)$.

Si queremos factorizar **trinomios de la forma** x^2+bx+c**,** siempre que existan dos números que sumados den b y multiplicados den c, la factorización será el producto de dos binomios que sean la suma de x con cada uno de esos números.

$$(x+a)(x+d)=x^2+(a+d)x+(ad)$$

Trinomios de la forma x^2+bx+c

Ejemplo:

Factorizar: $x^2-7x+12$

Debemos encontrar dos números que sumados den –7 y multiplicados den 12.

$$(?)+(?)=-7$$
$$(?)(?)=12$$
$$(-3)+(-4)=-7$$
$$(-3)(-4)=12$$

Por lo tanto la factorización quedará así:

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 15 sobre **factorización de expresiones algebraicas** de la página 155 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 217 del Apéndice 1.

Método de factorización para resolver ecuaciones cuadráticas

El método de factorización se utiliza para resolver problemas de la vida cotidiana que involucran ecuaciones cuadráticas, por ejemplo para buscar la solución de la ecuación:

$$x^2+6x-40=0$$

la expresión es un trinomio de la forma x^2+bx+c, por lo tanto puede factorizarse así: $(x+n)(x+m)$,

$$x^2+6x-40=0 \text{ se factoriza } (x+10)(x-4)$$

$$\text{Por lo tanto, } (x+10)(x-4)=0$$

De aquí podemos encontrar dos soluciones para la ecuación cuadrática. Como el producto de los dos factores encontrados es igual a 0, las dos posibilidades para obtener 0 son, que la primera sea 0, o que la segunda sea 0. Recuerda que el producto de un número por 0 es 0.

Si $x+10=0$, entonces $x=-10$, ésta es la primera solución.
Si $x-4=0$, entonces $x=4$, ésta es la segunda solución.

¡Atención! Las ecuaciones cuadráticas generalmente tienen dos soluciones.

Método de fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

Otro método para resolver ecuaciones cuadráticas es utilizando la **fórmula general**. Para una ecuación de la forma ax^2+bx+c, sustituimos los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática a la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le conoce como **fórmula general**.

La parte de dentro de la raíz, b^2-4ac se le llama discriminante, porque sirve para discriminar entre los tipos posibles de respuesta. Si es positivo, habrá dos soluciones; si es cero sólo hay una solución; y si es negativo hay dos soluciones que incluyen números imaginarios.
Analicemos como ejemplo la siguiente ecuación cuadrática y busquemos su solución con la fórmula:

$$2x^2-3x-9=0$$

$$a=2,\quad b=-3,\quad c=-9$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(-9)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}$$

$$x=\frac{3\pm 9}{4}$$

¡Atención! El signo ± nos indica que a partir de aquí obtendremos dos valores: con 9 positivo y con 9 negativo.

El primer valor es:

$$x=\frac{3+9}{4}=\frac{12}{4}=3$$

El segundo valor es:

$$x=\frac{3-9}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$

#Entrénate

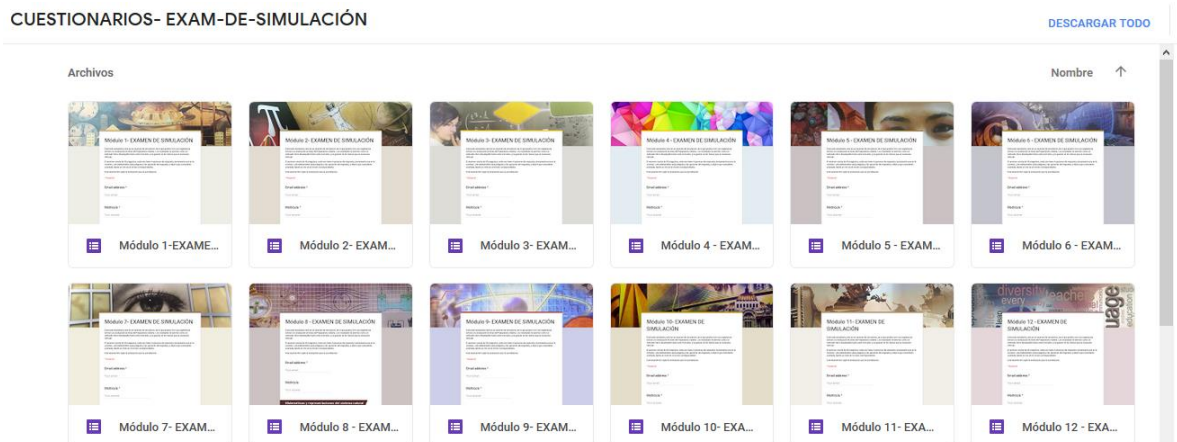
Hemos llegado al final de este módulo, ahora te toca revisar que tan preparado estás para el examen de acreditación.
Como pudiste observar en el Curso propedéutico de Comunicación, el examen para acreditar tu modulo tiene retos importantes en cuanto al manejo de Tecnologías de Información y Comunicación y el seguimiento de instrucciones.

Antes de realizar el examen real, entrénate con la evaluación **¿Ya estoy preparado(a)?** que se encuentra en la sección final del libro, donde al terminar podrás verificar tus respuestas en el **Apéndice 1**. También prepárate con nuestro **simulador de examen**, el cual te servirá como un indicador de tu desempeño y te guiará en los temas necesarios a reforzar, para ello sigue las siguientes indicaciones:

1. Ingresa a nuestra página de internet www.seg.guanajuato.gob.mx/prepaabierta.



2. Elige el examen de simulación correspondiente a este módulo.



3. Escribe tus datos de identificación: Nombre, matrícula, ¿Dónde estudio? en su caso grupo de estudio, Centro de Asesoría al que perteneces, o si eres estudiante independiente.

4. Comienza a contestar las preguntas, toma en cuenta los siguientes criterios:

4.1. Lee con detenimiento cada una de las preguntas, sigue la guía ¿cómo son los exámenes? Que aparece en el Curso propedéutico de comunicación.

4.2 No dejes ninguna pregunta sin contestar

4.3. No hay límite de oportunidades para contestar el examen

5. Según tus resultados úbica los temas que necesitas revisar nuevamente antes de realizar el examen de acreditación.

ANEXO. CORRECCIONES DE EDICIÓN EN EL LIBRO DE TEXTO

Referencia		Dice	Debe decir
Pág	Número/inciso		
33	Ejemplo	$5590	$5790
43	Dentro del desarrollo del tema	La división entre cero no está definida. Por ejemplo, 6 ÷ 0 no tiene solución porque no existe ningun número real que multiplicado por 0 sea igual a 6.	La división entre cero no está definida. Por ejemplo, 6 ÷ 0 no tiene solución porque no existe ningún número real que multiplicado por 0 sea igual a 6.
45	Dentro del desarrollo del tema	$-6^4 = -6 \times -6 \times -6 \times -6 = 36 \times -6 \times -6 = -216 \times 6 = 1296$	$-6^4 = -6 \times -6 \times -6 \times -6 = 36 \times -6 \times -6 = -216 \times -6 = 1296$
51	Actividad 12 inciso c	$\sqrt{-52^2}$	$\sqrt{-5^2}$
73	Asesoría	¿? Asesoría Para que sea más fácil recordar… Para encontrar tanto el MCM como el MCD, se usa un procedimiento similar: descomponer los dos números en primos y utilizar todos los número que aparecen elevados a una potencia: • En el mínimo común múltiplo utilizas los números primos con la potencia mayor. De este modo, solo incluimos los números que aparecen en todas las descomposiciones. • En el máximo común divisor empleas los números primos con la menor potencia. De este modo, incluimos los números que aparecen aunque sea en una de las descomposiciones.	• En el mínimo común múltiplo utilizas los números primos con la potencia mayor. De este modo, incluimos los números que aparecen aunque sea en una de las descomposiciones. • En el máximo común divisor empleas los números primos con la menor potencia. De este modo, solo incluimos los números que aparecen en todas las descomposiciones.
88	Propiedad 5	$(5 - 3 = 2 \; y \; 15 - 6 = 9$ respectivamente)	$(5-2=3$ y $15-6=9$ respectivamente)
108	Actividad 4	$\frac{3}{5}x$	$\frac{3}{5}xy$
112	Dentro del desarrollo del tema	$\begin{array}{r} -8a+6b+c \\ +\quad 5a-2b+4c \\ \hline 13a+4b+5c \end{array}$	$\begin{array}{r} -8a+6b+c \\ +\quad -5a-2b+4c \\ \hline -13a+4b+5c \end{array}$
116	Dentro del desarrollo del tema	$3x^2(x-2) = 3x^4 - 6x^3$	$3x^3(x-2) = 3x^4 - 6x^3$
117	Actividad 7, B, inciso d	$(8x^3 - 9y^3 - 6x^2y + 5xy) \div (2x - 3y)$	$(8x^3 - 9y^3 - 6x^2y + 5xy^2) \div (2x - 3y)$
152	Dentro del desarrollo del tema	$= 25x^6 - 15x^3y^2 - 15x^3y^2 - 9y^4$	$= 25x^6 - 15x^3y^2 - 15x^3y^2 + 9y^4$
152	Dentro del desarrollo del tema	$(3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + b^2$	$(3a-2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$
158	Sesión 26, paso 4	$20x^2 + 10x - 12x - 6 = 20x(2x + 1) - 6\,(2x + 1)$	$20x^2 + 10x - 12x - 6 = 10x(2x+1) - 6(2x+1)$
159	Tipos de factorización. Trinomio cuadrado perfecto	$x^2 - 2xy + y^2 = (x + y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
187	Actividad 7, A, inciso c	$-15 - -22 =$	$15 - -22 =$

Fuentes de consulta

García, N. (2012). Representaciones simbólicas y algoritmos. México: SEP.

seg.guanajuato.gob.mx

GTO
Grandeza de México

Secretaría
de Educación

PREPARATORIA ABIERTA
GUANAJUATO

