seg.guanajuato.gob.mx

GTO Grandeza de México

Secretaría de Educación

Dinámica en la naturaleza: el movimiento

Guía de Estudio

PREPARATORIA ABIERTA
GUANAJUATO



Este material es propiedad de la Secretaría de Educación de Guanajuato y están protegidos por la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR bajo el Registro 03-2017-070611482200-01 y demás disposiciones internacionales en la materia. Esta guía tiene como único propósito que los usuarios lo consulten con finalidades educativas. Los usuarios no están autorizados para transmitir ninguno de estos materiales por vía electrónica, o reproducirlos en forma alguna por ningún medio, electrónico, mecánico, sistemas de recuperación, grabación, impresión, fotocopiado, etc.

Secretaría de Educación de Guanajuato
Yoloxochitl Bustamante Diez

Subsecretaría para el Desarrollo Educativo
José Abel Arteaga Sánchez

Dirección General de Media Superior
Ximena María Alarcón Verduzco

Dirección de Preparatoria Abierta y a Distancia
Alejandro Carretero Carretero

Departamento Académico de la
Dirección de Preparatoria Abierta y a Distancia
Vania Ruth M. Castro Ortiz

Autoría
Yolanda del Pilar López Mejía

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante, la Guía de estudio que vas a consultar a continuación es parte de una serie de materiales complementarios gratuitos que Preparatoria Abierta Guanajuato ha preparado para apoyarte en este proceso de estudiar el bachillerato no escolarizado, éstos no sustituyen a los libros de texto oficiales.

Las Guías de estudio para el Plan Modular, se han elaborado atendiendo los propósitos formativos definidos en los programas de estudio, teniendo como parte esencial una síntesis de la información contenida en los libros de texto, complementado con elementos de ubicación sobre la interrelación de las competencias y contenidos que abordarás en el Plan de estudios.

Para obtener el mayor provecho de estos textos es importante que identifiques cómo están organizados y comprendas los propósitos de cada uno de sus apartados.

Comienza por revisar el **Índice**, en él, puedes ubicar los temas que encontrarás en las guías de estudio, teniendo como referencia los libros de texto.

En la sección llamada **Punto de partida**, ubica los campos disciplinares que están en juego al estudiar los módulos, el nivel que ocupa en el mapa curricular (para saber más sobre el mapa curricular por niveles, revisa el Curso propedéutico de comunicación), y las horas estimadas de estudio por módulo. También encontrarás dos columnas que te indicarán hacia donde te diriges, cuál es el propósito de estudiar cada uno de los módulos y las competencias que deberás desarrollar para lograr dicho propósito.

Ubícate, es el apartado en el que puedes revisar el mapa curricular por niveles, te permite visualizar en dónde te encuentras y en la parte inferior puedes revisar la relación temática de éste de manera previa y posterior. De esta manera puedes programar los exámenes a presentar, ya sea siguiendo la secuencia progresiva por niveles o según la relación entre temas.

Antes de empezar, a abordar los temas de cada módulo, es necesario que realices las evaluaciones diagnósticas iniciales llamadas ¿Con qué saberes cuento?, que puedes revisar en el libro de texto digital o impreso o en la plataforma educativa mieva.mx.

Al inicio de cada unidad encontrarás tres preguntas, **¿Qué voy a aprender y cómo?,** ¿Con qué propósito? y ¿Qué saberes trabajaré?, las respuestas a estos cuestionamientos consolidarán la información que revisaste en las secciones anteriores. Revisa las preguntas completas en los libros de texto impresos o digitales.

Recuerda que esta Guía es una síntesis informativa de los libros de texto, por lo que encontrarás de manera enfática conceptos y actividades seleccionadas que te ayuden a lograr los indicadores de desempeño que están planteados en los libros con el ícono de tiro al centro. Además de otros elementos para ubicarte como los recuadros que te indican la relación temática entre módulos y las competencias transversales.

Finalmente **#Entrénate**, es una sección que te invita a realizar los exámenes diagnósticos finales, ¿ya estoy preparado?, que puedes revisar en los libros de texto o en la plataforma mieva.mx, y los exámenes de simulación en línea que Preparatoria Abierta Guanajuato ha desarrollado para que seas el gestor de tu propio aprendizaje.

ÍNDICE

UNIDAD 1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO 4

El camino de Don Martín ... 6
Convirtiendo unidades ... 7
Movimiento rectilíneo uniforme ... 8
Funciones y movimiento ... 9
El plano cartesiano ... 10
Representando funciones ... 11
Las mañanas sabatinas de Citlalli ... 14
Cuando el origen no es el comienzo ... 14
Sistemas de referencia ... 14
¿Proporcionalidad en el movimiento? ... 15
El cambio del cambio ... 19
Ecuación del movimiento uniformemente acelerado ... 20
Caída Libre ... 21
Tiro vertical ... 21
Graficando manualmente ... 21
Funciones cuadráticas ... 22
Algunas técnicas especiales ... 24
En pleno vuelo ... 26
Vectores y una breve introducción a la Trigonometría ... 27
Movimiento parabólico ... 29

UNIDAD 2. Movimiento Circular 32

Elementos previous ... 33
En la rueda de la fortuna ... 34
Movimiento circular ... 35
Ecuaciones del movimiento circular uniforme ... 36
Funciones trigonométricas y el círculo unitario ... 40
Funciones trigonométricas y movimiento armónico simple ... 41
Profundizando en las funciones trigonométricas ... 42
El periodo ... 43
La fase ... 43
Movimiento circular acelerado ... 48
El péndulo ... 50
Movimiento armónico simple en el péndulo ... 50

UNIDAD 3. Dinámica del movimiento 51
Primera ley del movimiento de Newton 53
Segunda ley del movimiento de Newton 53
Masa y peso 53
Fuerza neta 53
Tercera ley del movimiento de Newton 54
Fricción 54
Las tres leyes del movimiento de Newton 56
Vectores y las leyes de Newton 58
Suma de vectores por el método del paralelogramo 58
Suma de vectores empleando componentes axiales 60
Suma de vectores empleando leyes de los senos y los cosenos 62
Newton en acción 65
Trabajo 65
Potencia mecánica 66
Energía 66
Energía cinética 67
Energía potencial 68
Todo se va a alguna parte: trabajo y conservación de la energía 70

ANEXO 1. CORRECCIÓN DE EDICIÓN DE LIBROS 75
Fuentes consultadas 76

Campo(s) disciplinar(es): Matemáticas, Ciencias experimentales, Humanidades y Ciencias sociales. Nivel: IV (Relaciones y cambios)	Módulo: Dinámica en la naturaleza: El movimiento Horas estimadas de estudio: 80 horas
Propósito formativo **Este módulo tiene como propósito, que desarrolles competencias que te permitan:** Aplicar las herramientas matemáticas de geometría, trigonometría y modelos matemáticos en el análisis de la dinámica del movimiento de los fenómenos naturales presentes en el entorno, empleados en el desarrollo de la ciencia y tecnología.	**Competencias disciplinares básicas:** **Al finalizar el módulo deberás contar con las siguientes competencias:** Fundamenta opiniones sobre los impactos de la ciencia y la tecnología en su vida cotidiana, asumiendo consideraciones éticas. Obtiene, registra y sistematiza la información para responder a preguntas de carácter científico, consultando fuentes relevantes y realizando experimentos pertinentes. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.

#Ubícate



Previamente

Curso propedéutico de Matemáticas y módulo 3

Este módulo tiene mayor relación temática con

Posteriormente

Principalmente con el módulo 20.



Antes de empezar

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad, **¿Con qué saberes cuento?** que aparece en las págs. 16 y 17 del libro de texto correspondiente a este módulo, una vez que termines compara tus respuestas con las que aparecen en el apéndice del mismo libro en la pág. 203.

¿Cuáles fueron tus resultados?

Qué tan sencillo te resultó resolver la evaluación diagnóstica ¿con qué saberes cuento?, si te sentiste como pez en el agua, estás listo para comenzar con el estudio de este módulo, recuerda estar monitoreando tu desempeño constantemente, basándote en las rúbricas de evaluación de las actividades y revisando el apéndice de las respuestas correctas que aparece al final de todos los libros de texto, ¡claro!, después de realizar por tí mismo los ejercicios.

Si al contrario, se te dificultó la resolución de este ejercicio de evaluación, será necesario que refresques algunos conocimientos y habilidades. Te recomendamos que revises el **"Curso propedéutico de matemáticas"** y el libro del **módulo 3 "Representaciones simbólicas y algoritmos"** de Preparatoria Abierta Guanajuato, que podrás consultar y descargar de manera gratuita en nuestra página de internet, www.seg.guanajuato.gob.mx/prepaabierta.

UNIDAD 1. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

¿Qué voy a aprender y cómo?

Mira a tu alrededor. Si estás al aire libre, sólo mira con atención. Si estás en una habitación, mira por la ventana más cercana. ¿Algo se mueve?

Lo más probable es que encuentres algo moviéndose. Los árboles bajo la fuerza del viento, vehículos, animales, otras personas: las posibilidades son muchas. El **movimiento** es un fenómeno tan común en nuestro mundo que es difícil encontrar una situación en la que nada se esté moviendo. Debido a lo anterior, estudiar el movimiento ha sido un tema de gran interés para el ser humano: ¿cómo se mueven los objetos?, ¿qué los hace moverse?, ¿puede algo quedarse en movimiento para siempre?, ¿qué elementos pueden facilitar -o dificultar- el movimiento? Si un objeto está moviéndose, ¿se puede predecir en dónde se encontrará después de cierto tiempo?

Las preguntas que la humanidad se ha hecho al respecto (y que ha logrado responder) son casi innumerables, y gracias a ellas hoy existen automóviles, trenes, barcos, aviones, bicicletas, es posible producir electricidad, entender y activar el mecanismo que permite que funcionen miles de aparatos. Si no estudiáramos y comprendiéramos el movimiento, viviríamos en un mundo muy distinto.

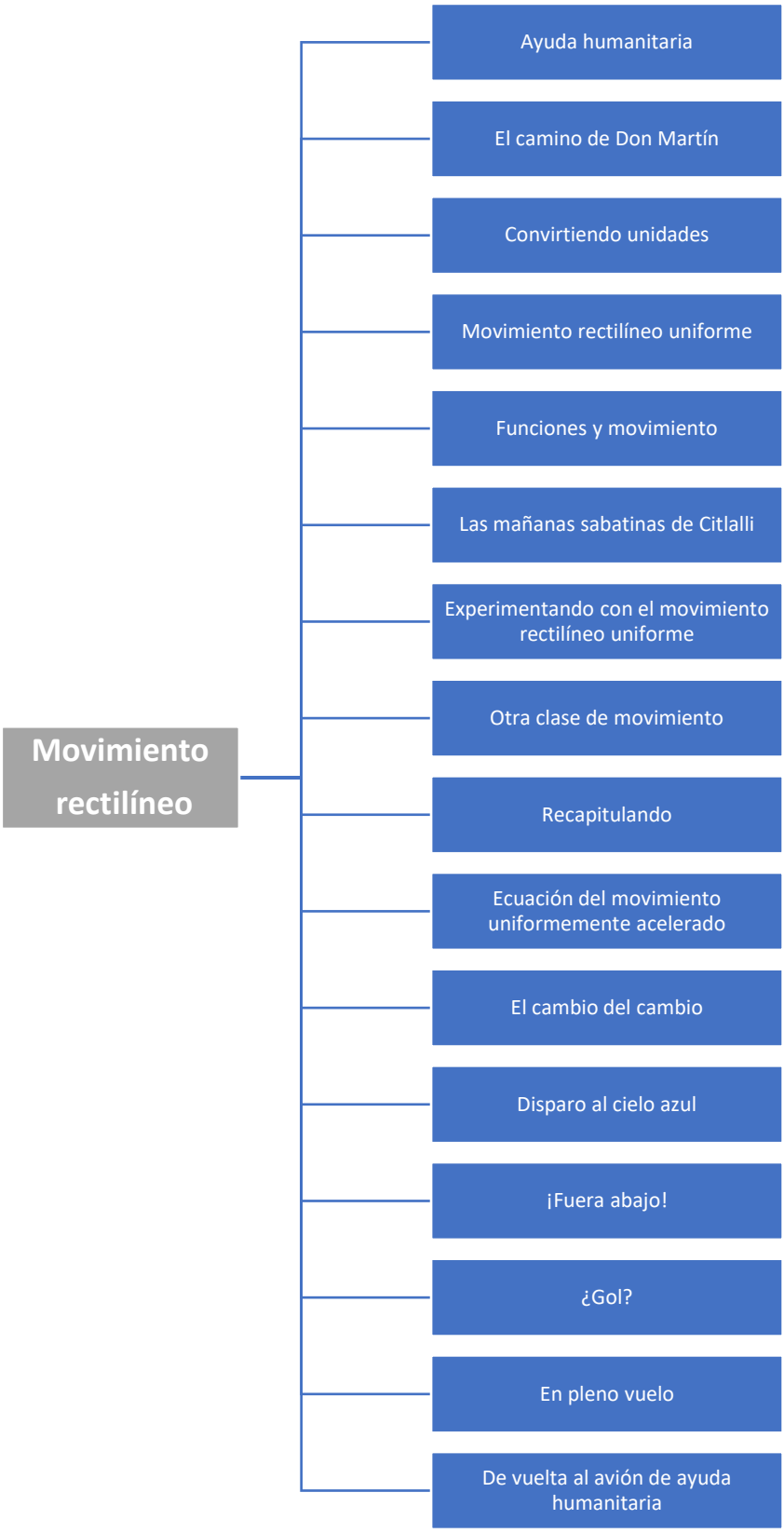
Debido a esto es muy importante que como estudiante de bachillerato, conozcas y puedas describir y explicar algunos tipos sencillos de movimiento, que se encuentran en la base de otros más sofisticados y que estudiarás en este primera unidad.

¿Con qué propósito?

El propósito de esta unidad es que relaciones los conceptos de movimiento a situaciones de tu entorno y los interpretes desde diversos enfoques utilizando la medición y herramientas matemáticas.

¿Qué saberes trabajaré?

Para aprender a estudiar e interpretar correctamente el **movimiento rectilíneo uniforme** en tu vida cotidiana, necesitarás desarrollar familiaridad con una serie de conceptos matemáticos, los cuales encuentran aplicación aquí, en el terreno de la Física; entre ellos se encuentran las nociones de **vector, sistema de referencia, variación (proporcional e inversamente proporcional), relaciones y funciones (lineales y cuadráticas)**, así como la resolución **de ecuaciones lineales y cuadráticas.** También será necesario que aprendas a manejar **ángulos, razones y funciones trigonométricas.** Emplearás todo ello para comprender ideas importantes como las **de distancia, desplazamiento, velocidad, rapidez y aceleración**, mismas que forman parte central del movimiento rectilíneo, tanto uniforme como acelerado. Su análisis también te ayudará a comprender mejor casos particulares de movimiento rectilíneo como la **caída libre**, y generalizaciones como el **tiro parabólico.** Entre otras cosas, aprenderás que puedes distinguir entre tipos de movimientos al estudiar la clase de funciones que los representan; **despejarás variables** en diferentes ecuaciones para obtener información sobre objetos en movimiento, usando **representaciones y métodos** que podrán ser tanto **gráficos como algebraicos** para describirlos mejor. Incrementarás tu comprensión de diversas situaciones que involucran movimiento y expresarás con claridad ideas y conceptos relativos al tema. Aprenderás que es posible expresar cantidades físicas empleando diferentes **sistemas de unidades**, y podrás trasladarte de un sistema a otro. Además, harás uso de **herramientas tecnológicas** para ayudarte a describir y resolver problemas que involucren **movimiento, distancia y desplazamiento.** Todo ello mientras aprendes a ser más analítico, más creativo, más autónomo y más sistemático.


Movimiento rectilíneo
Ayuda humanitaria
El camino de Don Martín
Convirtiendo unidades
Movimiento rectilíneo uniforme
Funciones y movimiento
Las mañanas sabatinas de Citlalli
Experimentando con el movimiento rectilíneo uniforme
Otra clase de movimiento
Recapitulando
Ecuación del movimiento uniformemente acelerado
El cambio del cambio
Disparo al cielo azul
¡Fuera abajo!
¿Gol?
En pleno vuelo
De vuelta al avión de ayuda humanitaria

El camino de Don Martín

A una cantidad (por ejemplo, una longitud, un tiempo, una temperatura, etcétera…) cuyo valor va cambiando conforme se desarrolla algún proceso, se le llama **variable**. Por otro lado, una cantidad que se mantiene en el mismo valor durante el desarrollo de un proceso se llama **constante**.

La **rapidez** de un objeto (que puede ser una persona, un auto, un avión, cualquier cosa que se mueva) es una medida de qué tan rápido ese objeto recorre determinada distancia. Para calcularla, se divide la distancia recorrida entre el tiempo que lleva recorrerla.

Ejemplo:

Un automóvil sale de Pachuca rumbo a Ciudad Sahagún, en el Estado de Hidalgo. La tabla nos muestra la distancia recorrida por el auto conforme pasa el tiempo:

Tiempo transcurrido (minutos)	Distancia recorrida (km)
0	0
10	15
30	45

La información de la tabla nos permite determinar varias características del movimiento que representa. Entre otras cosas, podemos saber cuál es la rapidez del automóvil en los primeros 10 minutos de recorrido.

El camino para responder esta pregunta requiere, primero, que comprendas qué se está preguntando. Queremos saber la rapidez del vehículo en sus primeros 10 minutos de recorrido.

Ahora bien, la rapidez, de acuerdo con lo que acaba de verse, se calcula dividiendo la distancia recorrida entre el tiempo que lleva recorrerla. Si observas la tabla que registra el movimiento del automóvil, verás que en los primeros 10 minutos, recorrió 15 kilómetros. Entonces su rapidez en ese intervalo de tiempo se obtiene haciendo:

$$\text{Rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{15km}{10\,\text{min}} = 1.5\,{}^{km}\!/_{\text{min}}$$

Ejemplo:

¿Cuál es su rapidez entre los 10 y los 30 minutos de viaje?

Observa de nuevo la tabla. A los 10 minutos, el auto había recorrido 15 kilómetros, mientras que a los 30 minutos ya llevaba 45 kilómetros. Si te das cuenta, entre ambos momentos transcurrieron 20 minutos, y en ese tiempo el auto recorrió 30 kilómetros. Entonces, su rapidez fue de:

$$\frac{30km}{20\,\text{min}} = 1.5\,km/\text{min}$$

Lo que significa que el auto no alteró su rapidez, al menos de acuerdo con lo que se puede saber con los datos de la tabla.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 2 sobre **rapidez** de la página 25 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Es muy importante tomar en cuenta que las cantidades con las que estamos trabajando son cantidades físicas, y por lo tanto se miden empleando ciertas unidades; por ejemplo, la distancia recorrida se mide en metros, y el tiempo transcurrido lo estamos midiendo en minutos. La rapidez también tiene unidades: como se calcula dividiendo distancia entre tiempo, sus unidades son metros/minuto (que se lee “metros por minuto”).

Por supuesto, si en algún momento estás usando otras unidades para medir distancias y tiempos, las unidades de la rapidez cambiarán correspondientemente; por ejemplo, si la distancia la estás midiendo en kilómetros y el tiempo en horas, la rapidez tendría unidades de kilómetros/hora (“kilómetros por hora”).



Revisa más de este tema en:

Unidades es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 8** página 24.

Convirtiendo unidades

Las cantidades físicas se miden empleando diversas unidades: metros para la distancia, segundos para el tiempo, grados centígrados para la temperatura, etc. Una misma cantidad se puede medir empleando varias unidades. Por ejemplo, la distancia se puede medir en metros pero también en kilómetros, en centímetros, en pies, en pulgadas, ...

Para evitar confusiones innecesarias, a nivel internacional se ha acordado emplear las mismas unidades para medir cantidades físicas. Esta estandarización recibe el nombre de **Sistema Internacional de Unidades** (conocido como **SI**).

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza las actividades 4 y 5 sobre **distancia y tiempo** de la página 27 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Ejemplo:

Daniel mide 172 cm de estatura y quiere saber la equivalencia en pulgadas.

Solución:

Se sabe que una pulgada equivale a 2.54 cm, así que la conversión puede hacerla recurriendo a un "truco" consistente en multiplicar sus 172 cm de estatura por una fracción muy especial, una que valga 1. Como sabes, cuando una cantidad se multiplica por 1, no sufre ninguna modificación; el "truco" es elegir esa fracción de la siguiente manera:

- El numerador y el denominador deben ser iguales (para que efectivamente, la fracción valga 1).
- El numerador debe estar expresado en las unidades a las que Daniel quiere convertir su estatura, mientras que el denominador debe estar expresado en las unidades en las que ya está escrita su estatura.

Lo anterior significa que el numerador debe estar expresado en pulgadas, mientras que el denominador debe estarlo en centímetros. Una fracción que cumple con ambas condiciones es:

$$\frac{1\ \text{pulgada}}{2.54cm}$$

Ahora, sólo hay que multiplicar la estatura que se nos proporcionó por esta fracción. Lo que sucederá es lo siguiente:

$$172\ \text{cm} \times \frac{1\ \text{pulg.}}{2.54\ \text{cm}} = 67.72\ \text{pulg.}$$

Los "cm" se cancelan. ¿Por qué?

Al efectuar la multiplicación, los "cm" se cancelan, y sólo sobreviven las pulgadas. Como la fracción vale 1, la estatura no sufrió modificación alguna, a parte de haber quedado expresada en pulgadas. Así que los 172 cm de estatura de Daniel equivalen a 67.72 pulgadas.

Movimiento rectilíneo uniforme

Movimiento rectilíneo uniforme. Movimiento en el que el objeto que se mueve lo hace:

1. En línea recta, y
2. Manteniendo una rapidez constante.







Funciones y movimiento

Revisa más de este tema en:
Funciones es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 8** página 31 y **Módulo 15** página 45.

Es muy frecuente que las variables estén relacionadas entre sí, de modo que si se conoce el valor de una de ellas en un momento dado, es posible calcular el valor de la otra. Una **relación** de este tipo se conoce como **función**. Una función puede representarse de varias maneras, y aquí exploraremos algunas de ellas.

Función. Relación entre dos variables, en la cual si se conoce el valor de una de ellas, es posible saber el valor de la otra.

Revisa más de este tema en:
Variables dependientes e independientes es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 14** página 25, **Módulo 18** página 47 y **Módulo 20** página 157.

En matemáticas se suele distinguir a las dos variables de una función llamándolas **"variable dependiente"** y **"variable independiente"**. Cuando se estudia el movimiento, el tiempo se considera como la variable *independiente* (el paso del tiempo no depende de nada, es "*independiente*") mientras que, por ejemplo, la distancia es la variable *dependiente* (la distancia recorrida por un objeto "*depende*" del tiempo que lleva moviéndose).

Variable dependiente: una variable cuyo valor "*depende*" del valor que toma otra variable. Por ejemplo, en el caso de un automóvil que se mueve por una autopista con una velocidad constante, la distancia recorrida depende del tiempo que el auto lleve en movimiento. La distancia recorrida es la variable dependiente.
Variable independiente: una variable cuyo valor no "*depende*" de ningún factor externo, es decir, es "*independiente*". En muchas situaciones físicas, se suele tomar al tiempo como la variable independiente, pues el paso del tiempo no depende de —ni puede ser alterado por— ningún factor externo.

El tiempo siempre se considera como la variable independiente en cualquier movimiento.

Las otras variables (que pueden ser la distancia, la rapidez, entre otras) se consideran variables dependientes: dependen del tiempo transcurrido.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 8 y 9 sobre **rapidez** de la página 31 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

¡Ojo, competencia transversal!

El plano cartesiano

Existen formas de representar una función; una de ellas son las *gráficas*. Para comprender la manera en que esto se puede llevar a cabo, necesitas comprender primero lo que es el plano cartesiano.

Observa la figura 1.2, que representa la vista superior de un piso de oficinas. El punto verde representa la posición de Juan, uno de los oficinistas que trabaja en el lugar, mientras que los puntos azules indican las posiciones de cinco de sus compañeros de trabajo.

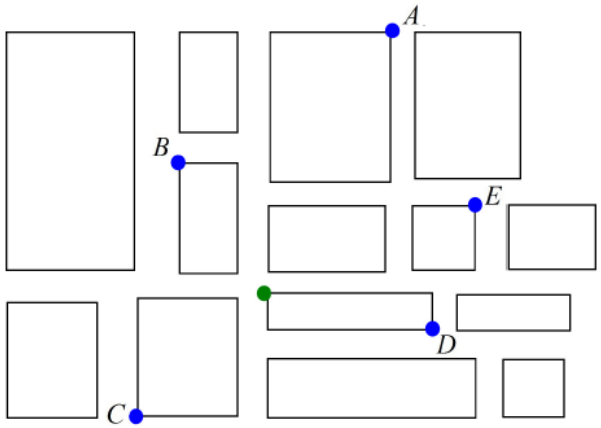


Figura 1.2

Revisa más de este tema en:

Plano cartesiano es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas, Módulo 3** página 131 y **Módulo 8** página 146.

Una manera de ubicar con precisión las posiciones de todos los oficinistas es mediante un plano cartesiano, como se aprecia en la figura 1.3.

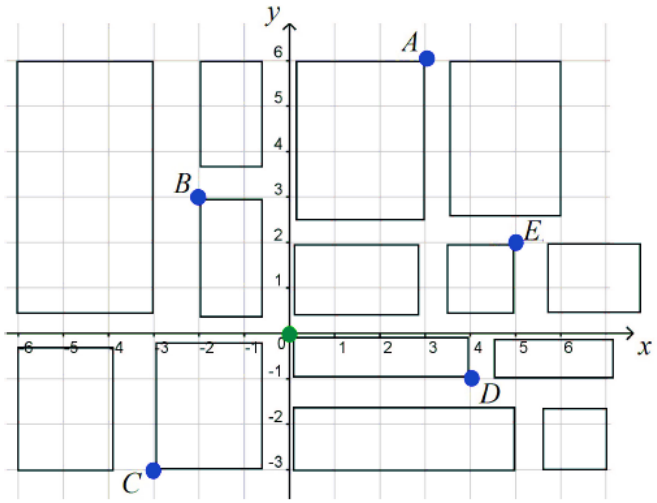


Figura 1.3

El **plano cartesiano** consiste precisamente en un plano, sobre el cual se han dibujado dos ejes (llamados ejes cartesianos) que no son más que rectas numéricas. Cada eje representa los valores de una variable determinada; es usual que la variable representada en el eje *horizontal* se etiquete con la letra x, mientras que la representada en el eje *vertical* se suele etiquetar con la letra y.

En el caso de la figura 1.3, ambos ejes representan longitudes, pero no necesariamente debe ser así (se puede representar en ellos cualquier variable). El punto en el que se cruzan ambos ejes se llama ***origen de coordenadas***; en este caso, el origen de coordenadas coincide con la posición de Juan. La figura 1.4 es una versión abstracta de las anteriores,

en la que se han conservado sólo los ejes cartesianos y los puntos que indican la posición de los cinco compañeros de Juan:

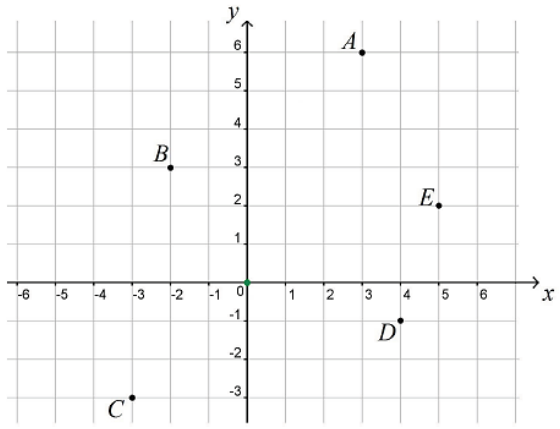


Figura 1.4

La forma de ubicar un punto en el plano es asignarle dos números que constituirán sus coordenadas; estos números corresponden a la distancia que hay que desplazarse a lo largo de cada eje (partiendo desde el origen, y comenzando siempre por el eje horizontal) para llegar al punto en cuestión. Por ejemplo, para llegar desde el origen (la posición de Juan) hasta la posición del oficinista A, se deben recorrer tres unidades en la dirección positiva del eje horizontal, y después seis unidades en la dirección positiva del eje vertical. Esto se escribe $(3,6)$. Esas son las coordenadas del punto A.

De esta manera, a todo punto en el plano le corresponde una pareja de números, sus coordenadas, que indican su ubicación respecto al origen de coordenadas.

Por último, es importante saber que en un **plano cartesiano**, al *eje vertical* también se le llama ***eje de las ordenadas***, mientras que el *horizontal* recibe el nombre de ***eje de las abscisas***.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 10 de la página 34 sobre **coordenadas** de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

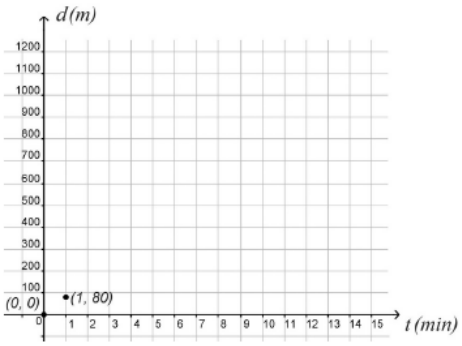
Representando funciones

Partiendo de esta tabla:

Tiempo transcurrido (minutos)	Distancia recorrida por Don Martín en el tramo recto (metros)
0	0
1	80
5	400
7	560
9	720
13	1040
15	1200

Tabla 1.2

Puedes considerar a cada pareja tiempo-distancia como las coordenadas de un punto en un plano cartesiano, en el que la variable independiente (recuerda, el tiempo) se representa en el eje horizontal mientras que la variable dependiente (en este caso, la distancia) se representa en el eje vertical. Observa la figura.



Las letras d y t significan, respectivamente, distancia y tiempo. Es usual representar a las variables con letras, y así lo haremos en adelante. Cuando se escribe $d(m)$ se está diciendo que la distancia se mide en metros, mientras que $t(min)$ indica que el tiempo se mide en minutos.

En esta figura ya aparecen graficados dos puntos: el $(0,0)$ que corresponde al primer renglón de la tabla, donde $t=0$ y $d=0$. También aparece el punto $(1,80)$ que corresponde al segundo renglón donde $t=1$ y $d=80$.

Hay dos formas de representar la función tiempo-distancia: mediante una tabla y mediante una gráfica. Los valores de la tabla resultaron proporcionales mientras que la gráfica se ajusta a una línea recta.

Veamos ahora una forma más de representar la misma función: mediante una **ecuación**.

Ejemplo:

1. Una hormiga sale de su hormiguero y se mueve en línea recta alejándose de él. Metro y cronómetro en mano, vamos tomando medidas de la distancia (d) que ha recorrido y del tiempo (t) que ha pasado desde que salió del hormiguero. Con esas medidas se construye la tabla siguiente:

t (minutos)	d (metros)
0	0
2	4
3	6
4	8

Obtener una ecuación que nos permita calcular los distintos valores de d a partir de los correspondientes valores de t.

Solución:

Si observas con atención, puedes darte cuenta de que si se multiplican los valores de t por 2, se obtienen los correspondientes valores de d. Esto significa que la ecuación que buscamos es: $d=2t$

Ejemplo:

2. La siguiente tabla describe el movimiento de una segunda hormiga, que para el momento en que echamos a andar nuestro cronómetro ya se había alejado cierta distancia del hormiguero. Tomando mediciones similares a las del caso anterior, se obtiene esta tabla:

t (minutos)	d (metros)
0	10
2	12
3	13
4	14

Obtener una ecuación que nos permita calcular los distintos valores de d a partir de los correspondientes valores de t.

Solución:

Esta vez el patrón es un poco distinto, pero si lo piensas un poco descubrirás que los valores de d se obtienen al sumar 10 a los de t. Esto se escribe:

$$d = t + 10$$

la cual es la ecuación que estábamos buscando.

Ejemplo:

3. Para la siguiente ecuación: $d = 4t$

Podríamos calcular cuántos minutos deben pasar para recorrer 40 metros, si sustituimos el valor $d = 40$ (recuerda, d es la distancia recorrida) en la ecuación. Tendríamos:

$$40 = 4t$$

Y podemos despejar a t de la siguiente manera:

$40 = 4t$	Esta es la ecuación una vez que sustituimos $t = 40$
$\Rightarrow \frac{40}{4} = t$	Dividimos entre 4 ambos lados de la ecuación
$\Rightarrow 10 = t$	Tenemos nuestro resultado

Entonces, para recorrer 40 metros en este ejemplo, deben pasar 10 minutos.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 13 sobre **ecuaciones lineales** de la página 38 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Recapitulando:

Una **función** es la relación de dependencia entre dos variables, llamadas ***dependiente e independiente***, de manera que si se conoce el valor de una de ellas, puede obtenerse el valor de la otra.

Existen muchas maneras de representar una función. Entre ellas, tres nos interesan particularmente: *tablas, gráficas y ecuaciones*.

Una **función** se llama **lineal** si sucede que:

a) Su tabla presenta valores proporcionales,
b) Su gráfica es una línea recta, y
c) Su ecuación es lineal.

ACTIVIDAD:

- ✓ Revisa el tema de **Experimentando con el movimiento rectilíneo uniforme** que se encuentra en la página 40.

Las mañanas sabatinas de Citlalli

Cuando el origen no es el comienzo

En una ***función lineal***, la *ordenada al origen* es el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente vale cero.

Gráficamente, la ordenada al origen es el punto en donde la recta corta al eje de las ordenadas.

Sistemas de referencia

Probablemente hayas escuchado una famosa frase según la cual “todo es relativo”. En física, eso resulta en cierto modo correcto, y en el estudio del movimiento es una afirmación bastante importante.

El aspecto de un movimiento puede cambiar dependiendo del sistema de referencia desde el cual se le esté observando.

Los sistemas de referencia suelen representarse con la ayuda de un plano cartesiano; todo lo que hay que hacer es especificar en dónde se colocará el origen de ese plano.

Revisa más de este tema en:
Proporcionalidad es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedeútico de Matemáticas** y **Módulo 3** página 84.

¿Proporcionalidad en el movimiento?

Ejemplo:

¿Son proporcionales los valores de las variables d y t de la tabla?

t (min)	d (m)
0	60
1	110
2	160
4	260
5	310
6	360
7	410
8	460
10	560

Calcula los distintos incrementos que sufre t al pasar de una fila a la siguiente (es decir, cuánto aumenta de una fila a la que sigue).

Solución:

Es posible que no lo parezca a primera vista, pero en realidad esta tabla sí esconde proporcionalidad.

Al pasar de la segunda fila a la tercera, el tiempo se incrementa en 1 minuto. Correspondientemente, la distancia se incrementa en 50 metros. La razón "incremento en distancia" / "incremento en tiempo" es:

$$\frac{50 \text{ metros}}{1 \text{ minuto}} = 50 \text{ m/min}$$

Para pasar de la tercera fila a la cuarta, el tiempo se incrementa en 2 minutos, mientras que la distancia se incrementa en 100 metros. La razón "incremento en distancia" / "incremento en tiempo" es:

$$\frac{100 \text{ metros}}{2 \text{ minutos}} = 50 \text{ m/min}$$

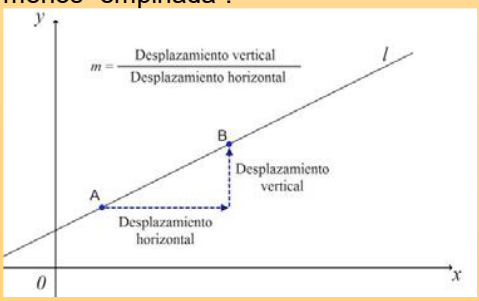
Entonces ambas razones son iguales, y efectivamente hay proporcionalidad.

Cuando dos cantidades son proporcionales, la razón que se forma entre ellas es una constante. Esta constante recibe el nombre de "constante de proporcionalidad".

En un movimiento rectilíneo uniforme, los incrementos de ***tiempo*** y de ***distancia*** son cantidades proporcionales. La constante de proporcionalidad entre ambos incrementos es igual a la rapidez del objeto móvil.

La **constante de proporcionalidad** también recibe el nombre de ***pendiente***, sobre todo cuando se trabaja con la gráfica que representa el movimiento en cuestión.

Pendiente: en Geometría analítica, la pendiente de una recta es un número que mide la "inclinación" de dicha recta. Si consideramos dos puntos que pertenezcan a la recta, la pendiente es la razón "*desplazamiento vertical*" / "*desplazamiento horizontal*" al ir de un punto al otro. Si esa razón es grande, la recta será muy "empinada", si es pequeña, será menos "empinada".



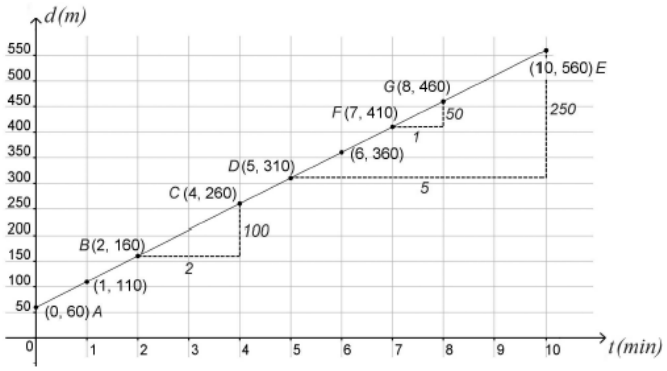
Los puntos A y B pertenecen a la recta l. Al ir de A hacia B, es necesario realizar un cierto "desplazamiento horizontal" y luego un determinado "desplazamiento vertical". La pendiente de la recta es la razón entre ambos desplazamientos.

Ejemplo:

Calcular la pendiente del ejercicio anterior.

Solución:

La gráfica que corresponde al movimiento del ejemplo se muestra a continuación:



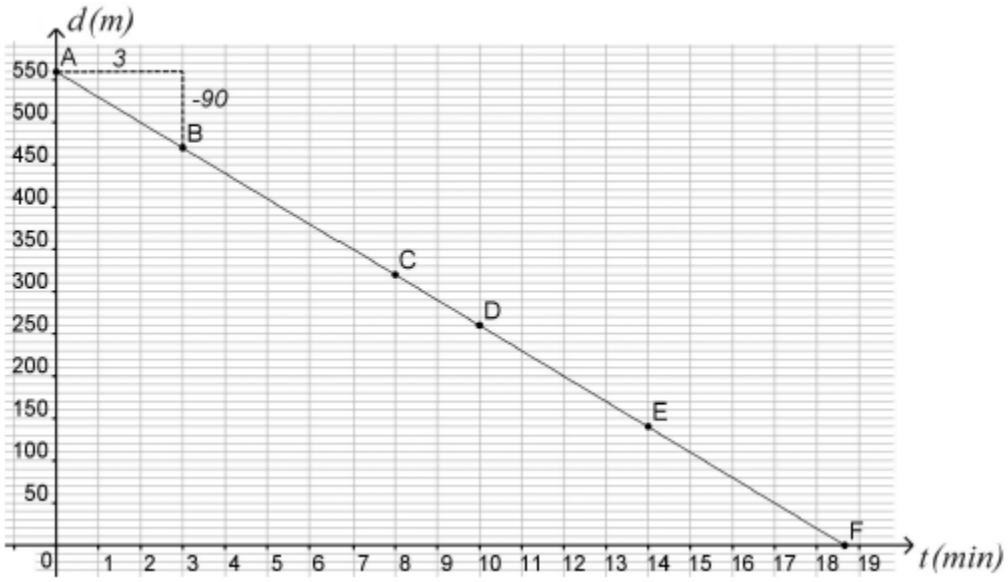
En la gráfica, la *constante de proporcionalidad —la pendiente—* se puede calcular fácilmente, con un proceso completamente análogo al que se lleva a cabo cuando se tiene la tabla; por ejemplo, observa los puntos B y C. Para pasar de uno a otro, el tiempo debe aumentar en 2 minutos mientras que la distancia se incrementa en 100 metros. Entonces la pendiente vale, como ya sabíamos, 100 metros / 2 minutos = 50 m/min.

La razón de que a la constante de proporcionalidad se le llame "**pendiente**" es que su valor determina qué tan "empinada" será la recta, de manera que una pendiente grande dará una recta muy "empinada", y viceversa.

Revisa más de este tema en:

Función lineal y pendiente es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 8** página 57.

La gráfica siguiente representa una trayectoria de movimiento:



Para calcular la rapidez cuando va del punto A al B se recorre 90 metros mientras pasan 3 minutos. Entonces su rapidez es: $v = \frac{-90 \text{ metros}}{3 \text{ minutos}} = -30 \text{ m/min}$, donde v es la velocidad.

Se tomó negativa la distancia que se recorre en este tramo debido a que, como se puede deducir observando la gráfica, al avanzar el tiempo esa distancia no aumenta sino disminuye. Cuando una cantidad aumenta su valor su incremento es positivo, pero si lo disminuye, el incremento se considera negativo.

Esto tiene como consecuencia que su rapidez (la pendiente de la función) sea también negativa. Gráficamente, la recta está "dirigida" hacia abajo.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 19 sobre proporcionalidad de la página 49 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Ejemplo:

Si la ecuación fuera:

$$d = -20t + 50$$

y quisiéramos saber cuánto tiempo debe transcurrir para que la distancia d valga 10 metros, sólo necesitamos sustituir el valor $d = 10$ en la ecuación y despejar t:

Solución:

$10 = -20t + 50$	Esta es la ecuación, con el valor de *d* ya sustituido.
$\Rightarrow 10 - 50 = -20t + 50 - 50$	Se resta 50 a ambos lados de la ecuación.
$\Rightarrow -40 = -20t$	En el miembro izquierdo, 10 menos 50 da -40. En el derecho, 50 menos 50 da cero, y ya no se escribe.
$\Rightarrow \frac{-40}{-20} = \frac{-20t}{-20}$	Se dividen entre -20 ambos miembros de la ecuación.
$\Rightarrow 2 = t$	En el miembro izquierdo, -40 entre -20 da 2. En el derecho, -20 entre -20 da 1, y sólo se escribe la *t*. Hemos terminado.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 20 sobre **proporcionalidad** de la página 50 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Recapitulando

La ecuación que encontraste para el movimiento de Citlalli tiene la forma:

$$d = vt + d_0$$

En esta ecuación las variables son d (la distancia recorrida) y t (el tiempo transcurrido). Por otro lado, tanto v como d_0 son constantes; v es la rapidez del movimiento (la pendiente de la gráfica, que se calcula dividiendo los incrementos de distancia entre los incrementos correspondientes de tiempo) mientras que d_0 es la posición inicial (la ordenada al origen).

Esta ecuación es importante porque cualquier función lineal se puede escribir en esa forma; además, si se conoce esa ecuación se puede saber de inmediato cuál es la rapidez del movimiento (identificando el valor de v) y cuál era la posición desde la que el objeto móvil comenzó a moverse (identificando el valor de d_0).

Ejemplo:

Supongamos que el movimiento de un tren en un tramo recto de la vía queda descrito por la ecuación $d = 70t + 10$, en la que la distancia d se mide en kilómetros y el tiempo t se mide en horas.

Comparando esta ecuación con $d = vt + d_0$ vemos inmediatamente que la rapidez del tren es de $70\ km/h$, y que su movimiento comenzó a $10\ km$ del origen del sistema de referencia.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 21 sobre **función lineal** de la página 51 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

El cambio del cambio

El cambio en la velocidad por unidad de tiempo recibe el nombre de **aceleración**. Esto se escribe:

$$\text{Aceleración} = \frac{\text{Cambio en la velocidad}}{\text{Tiempo que toma el cambio}}$$

En el lenguaje informal, se suele usar rapidez y velocidad como sinónimos; sin embargo, hablando en forma estricta existe una diferencia entre ambos conceptos: si sólo decimos que un objeto se mueve a 10 m/s, estamos especificando su rapidez. Pero si decimos que se mueve a 10 m/s en dirección sur, estamos dando su velocidad.

Cuando se especifican tanto la rapidez como la dirección de un movimiento, se está hablando de su velocidad.

Esto significa que, si la velocidad de un objeto es constante, también lo será la rapidez, pero lo contrario no es necesariamente cierto.

La diferencia principal entre velocidad y rapidez es que la primera especifica la dirección en la que ocurre el movimiento; por el momento seguiremos estudiando movimientos rectilíneos, porque los cambios de dirección no los necesitamos aún, y podemos hablar de rapidez y velocidad como si fueran sinónimos. Pero es importante que desde ahora seas consciente de que no lo son.

La aceleración es el cambio en la velocidad por unidad de tiempo, su unidad se abrevia escribiendo metros/segundo^2, o empleando abreviaturas, m/s^2.

Si la distancia se expresa en metros y el tiempo en segundos, las unidades de la aceleración serán m/s^2.

Ecuación del movimiento uniformemente acelerado

Recordando que la ecuación que describe un movimiento rectilíneo uniforme. La ecuación es:

$$d = vt + d_0 \qquad \textit{Ecuación del movimiento rectilíneo uniforme}$$

En el caso de un movimiento de ese tipo, la velocidad es constante. Pero si ese no es el caso, la ecuación anterior debe tomarlo en cuenta.

La ecuación del movimiento uniformemente acelerado es:

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + d_0 \qquad \textit{Ecuación del movimiento uniformemente acelerado}$$

que describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es una ecuación cuadrática. Tal y como sucede con la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme, esta ecuación puede servirte para calcular la distancia recorrida por un móvil acelerado si se conoce el tiempo que ha estado moviéndose, y viceversa. La diferencia es precisamente que ahora la ecuación es cuadrática (y no lineal como en el caso del movimiento uniforme).

Ejemplo: Considera la ecuación $2x^2 - 8 = 0$, en la que queremos despejar a x.

Solución: El despeje puede comenzar usando técnicas ya conocidas:

$2x^2 - 8 + 8 = 0 + 8$ Sumamos 8 a ambos lados de la ecuación

$2x^2 = 8$ Simplificamos

$\frac{2x^2}{2} = \frac{8}{2}$ dividimos entre 2 ambos lados de la ecuación

$x^2 = 4$ Simplificamos

En este punto, sólo queda eliminar la potencia para que x quede completamente despejada. Si has reflexionado al respecto, te habrás dado cuenta de que los despejes funcionan aplicando operaciones inversas: los elementos que aparecen *sumando* se cancelan *restándolos* a ambos lados de una ecuación, los que aparecen *multiplicando* se cancelan *dividiendo* entre ellos a ambos lados de la ecuación. Para eliminar la *potencia cuadrada* hace falta aplicar su operación inversa a ambos lados de la ecuación; la operación inversa de la *potencia cuadrada es la raíz cuadrada*, de modo que para terminar el despeje se tendrá

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$ Obtenemos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación

$x = \pm 2$

Así que una potencia se puede eliminar con la ayuda de la raíz correspondiente. Es importante notar que la raíz cuadrada de un número siempre lleva los dos signos.

Caída Libre



Revisa más de este tema en:

Caída libre es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 15** página 50.

En la vida cotidiana es difícil que un cuerpo llegue a estar en una verdadera "**caída libre**": eso significaría que nada, absolutamente nada, se opone a su movimiento... y en la superficie de nuestro planeta eso es particularmente difícil.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 29 sobre **caída libre** de la página 60 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Tiro vertical

Este tipo de movimiento incluye dos fases: una en la que un objeto se dirige hacia arriba, y otra en la que se dirige hacia abajo. En cada fase, el movimiento ocurre en sentidos opuestos, y para escribir correctamente la ecuación es necesario distinguir ambos de alguna manera. Lo más sencillo es emplear un sistema de referencia en el que especifiques cuál es la dirección (abajo o arriba) que considerarás positiva; la otra se considerará negativa.

Además, es necesario que determines en dónde colocarás el origen de este sistema de referencia. Podrías colocarlo en cualquier lugar, pero en este caso hay dos opciones particularmente útiles: colocarlo en el suelo (directamente debajo del aparato), o colocarlo justo en la posición desde la que sale disparado el objeto.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad que aparece en la página 66, en la que utilizarás el programa Geogebra, el cual es un software libre de **geometría dinámica** con el que podrás obtener la gráfica de ecuaciones.

Graficando manualmente

Para obtener la gráfica empleando lápiz y papel:

- Primero construyes una tabla *tiempo* vs *distancia recorrida*,
- Enseguida tomamos la ecuación que describa el movimiento del objeto;
- Posteriormente, asignamos valores a la variable t, para cada uno de ellos, usa la ecuación para calcular el valor correspondiente de d. Como t es el tiempo de vuelo del objeto, podrías asignarle los valores 0, 1, 2, 3, 4,… segundos (mientras más valores tomes, tu gráfica tendrá más puntos y será más detallada). Así que entonces, necesitas colocar dichos valores en una tabla.

Ejemplo:

Graficar la ecuación $d = -4.9t^2 + 20t + 1$ que describe el movimiento de una pelota

Solución:

1. Asignarle diferentes valores a la variable t $(0,1,2,3,4,5,6,...)$ y emplearlos para calcular el valor correspondiente de d, por ejemplo, para $t = 2$, sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$d = -4.9t^2 + 20t + 1$$
$$d = -4.9(2)^2 + 20(2) + 1$$
$$d = -19.6 + 40 + 1$$
$$d = 21.4$$

De la misma forma calculamos los valores restantes.

2. Colocar los valores en una tabla:

t (segundos)	d (metros)
0	
1	
2	21.4
3	
4	
5	
6	
⋮	⋮

3. Dibujar los ejes cartesianos en papel (milimétrico de preferencia) y ubicar ahí las distintas parejas (t, d) que obtengas. El resultado será un conjunto de puntos que al unirse formarán una línea suave, que se convertirá en un dibujo a mano de la gráfica.

Funciones cuadráticas

¡Ojo, competencia transversal!

Como hemos visto, una función es una relación entre dos variables, de tal manera que si conoces el valor de una de ellas, puedes calcular el valor de la otra. Una función se puede representar mediante ecuaciones, tablas y gráficas (entre otros medios de los que no nos ocuparemos aquí).

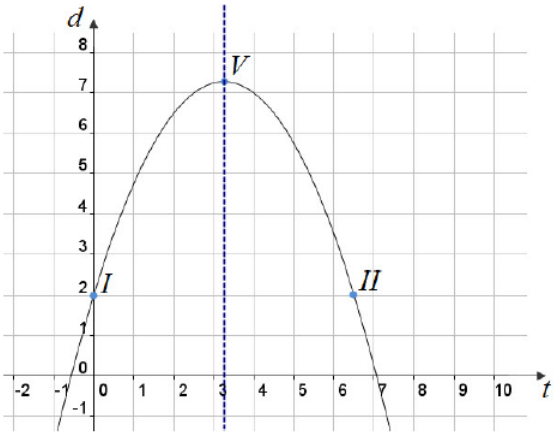
Revisa más de este tema en:

Funciones cuadráticas es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas**, **Módulo 3** página 145, **Módulo 8** página 61 y **Módulo 15** página 50.

Las funciones que se representan mediante ecuaciones cuadráticas, se les llaman precisamente, funciones cuadráticas.

La gráfica de una función cuadrática no será nunca una línea recta (como en las funciones lineales) sino una curva que recibe el nombre de “parábola”.

Por ejemplo para la ecuación $d = -0.5t^2 + 3.25t + 2$ que corresponde a una pelota que es lanzada hacia arriba, obtenemos la siguiente gráfica:



El punto señalado con la letra V es importante, pues nos indica la altura máxima que alcanzará la pelota, así como el tiempo en que llegará a esa altura. Ese punto se llama "***vértice***" de la parábola, el punto I corresponde al momento en que $t=0$ y el valor de d lo podemos encontrar sustituyendo $t=0$ en la ecuación de la parábola:

$$d=-0.5t^2+3.25t+2$$

Al efectuar la sustitución, tenemos:

$$d=-0.5(0)^2+3.25(0)+2$$
$$d=2$$

lo cual significa que las coordenadas del punto I son $(0,2)$. Ahora bien, una parábola es una curva simétrica; su eje de simetría es la línea vertical punteada la cual pasa por su vértice. Tomando eso en cuenta, podemos pensar ahora en el punto II, el cual es simétrico al punto I respecto al eje de simetría de la parábola. Por ser simétrico, el valor de d en ese punto también es 2, y para encontrar el valor de t en ese punto, sustituimos $d=2$ en la ecuación:

$$2=-0.5t^2+3.25t+2$$

Y ahora despejamos t:

$2-2=-0.5t^2+3.25t$ Restamos c a ambos lados de la ecuación.

$\Rightarrow\ 0=-0.5t^2+3.25t$ $(2$ menos 2 da cero$)$

Factorizando tenemos: $0=(-0.5t+3.25)t$

Esta ecuación equivale a escribir dos expresiones separadas,

$$-0.5t+3.25=0 \qquad t=0$$

al despejar t de la primera expresión, obtendremos el valor de la coordenada t para el punto II; queda:

$$t=\frac{-3.25}{-0.5}$$
$$t=6.5$$

Al ser la parábola una curva simétrica, la coordenada t del vértice quedará justo en medio de las coordenadas t de los puntos I y II, las cuales acabamos de calcular. Es decir, se encontrará justo a la mitad entre 0 y 6.5.

Lo que se acaba de efectuar es posible generalizarlo para la **ecuación general**.

Ecuación general:

$$y = ax^2 + bx + c$$

En la que las ***variables*** son x, y , mientras que a, b y c son ***números constantes*** conocidos.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 35 sobre **coordenadas del vértice** que aparece en la página 72, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Algunas técnicas especiales

Trabajar con funciones cuadráticas requerirá en general de algunas técnicas especiales que no hacían falta cuando las funciones (y sus ecuaciones) eran lineales.

La fórmula general para resolver **ecuaciones cuadráticas** establece que en una ecuación de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

El valor de x se puede hallar a partir de los valores de a, b y c al hacer:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Esperando en la parada del transporte público, ves pasar a un motociclista. Se mueve acelerando a razón de $8\, m/s^2$, a partir de una velocidad inicial de $10\, m/s$ (que llevaba en el momento en que lo viste pasar) y desde una posición inicial de $4\, m$ (respecto al origen del sistema de referencia, que colocaremos en el lugar desde donde estás tú).

Solución:

Empleando la ecuación:

$$d = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + d_0$$

la ecuación del movimiento para este motociclista resulta ser:

$$d = \frac{1}{2}(8)t^2 + 10t + 4$$

$$\Rightarrow d = 4t^2 + 10t + 4$$

Continuación…

Con ella, es posible averiguar la posición del motociclista luego de transcurridos $12\ segundos$; simplemente tomamos la ecuación y sustituimos los $12\ segundos$ en el lugar de t :

$$d = 4(12)^2 + 10(12) + 4$$
$$\Rightarrow d = 4(144) + 120 + 4$$
$$\Rightarrow d = 576 + 120 + 4$$
$$\Rightarrow d = 700$$

Lo que significa que después de 12 segundos, el motociclista se encuentra a 700 metros del origen del sistema de referencia (que, como habíamos comentado, coincide con tu posición).

Si por otra parte se quiere saber el tiempo que al motociclista le tomará llegar a los 1000 metros de distancia, se toma la ecuación y se sustituyen esos 1000 m en el lugar de d :

$$100 = 4t^2 + 10t + 4$$

Resolver esta ecuación cuadrática requiere técnicas particulares. Una de ellas es el empleo de la llamada "***fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas***". Para emplear esa fórmula, lo primero que se necesita es igualar la ecuación a cero:

$$0 = 4t^2 + 10t + 4 - 1000$$
$$0 = 4t^2 + 10t - 996$$

En este caso queremos resolver la ecuación:

$$4t^2 + 10t - 996 = 0$$

De manera que $a = 4,\ b = 10$ y $c = -996$. Entonces, la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas se convierte en:

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(4)(-996)}}{2(4)}$$
$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 16(-996)}}{8}$$
$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 15936}}{8}$$
$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{16036}}{8}$$
$$t = \frac{-10 \pm 126.63}{8} = \begin{cases} t_1 = 14.58 \\ t_2 = -17.08 \end{cases}$$

Continuación…

El resultado final indica que el tiempo tiene dos posibles valores, uno positivo y el otro negativo; (provenientes de cada uno de los dos signos que se le asignan a la raíz cuadrada); nos quedaremos con el valor positivo, pues el tiempo no toma valores negativos y por lo tanto esa solución, aunque correcta, no tiene un significado físico.

Entonces, para que el motociclista recorra una distancia de 1000 metros, deberán transcurrir aproximadamente 14.58 segundos.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 36 sobre **funciones cuadráticas** de la página 74 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Las respuestas obtenidas empleando los métodos algebraicos deberían coincidir perfectamente con las halladas a través de métodos gráficos; después de todo, se trata simplemente de enfoques diferentes para resolver el mismo problema. Sin embargo, es probable que en la práctica ambos conjuntos de respuestas no coincidan con exactitud. Ello es debido a que los métodos gráficos son, por su naturaleza, menos precisos que los algebraicos.

En pleno vuelo

Si en lugar de apuntar directamente hacia arriba, lo haces "en diagonal", la trayectoria de la pelota será bastante parecida a lo que se muestra en la siguiente figura. Este tipo de movimiento recibe el nombre de "**tiro parabólico**" por razones que son claras al observar la figura. Si lo reflexionas un momento, notarás que la forma exacta de la parábola dependerá (quizá entre otras cosas) del ángulo respecto al suelo con el que realices el tiro. Un ángulo cercano a 90° dará una parábola muy "*corta*" y "*alta*". Un ángulo cercano a los 0° resultará en una parábola más "*baja*" y "*larga*".

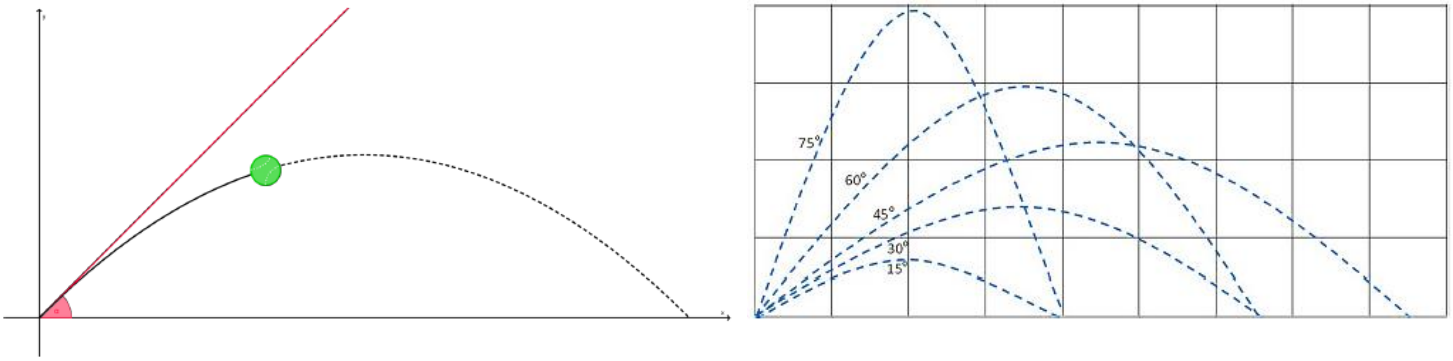


Figura 1.16 La pelota está siendo disparada con un ángulo de inclinación respecto al suelo distinto de cero; en líneas punteadas la trayectoria parabólica que seguirá la pelota.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 38 sobre **tiro parabólico** de la página 76 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Vectores y una breve introducción a la Trigonometría

Se ha hablado sobre la diferencia entre rapidez y velocidad, dijimos que la *rapidez* sólo contempla una magnitud (cuánta distancia recorre un objeto por unidad de tiempo) mientras que la *velocidad* incluye, además, una dirección. Una cantidad que sólo requiere especificar una ***magnitud*** (como la rapidez) se llama **escalar**. Por su parte, una cantidad que (como la velocidad) necesita que se especifique tanto su ***magnitud como su dirección*** recibe el nombre de **vector**.

Otro vector importante es el desplazamiento, que es a la cantidad escalar "distancia" lo que la velocidad es a la rapidez: cuando se dice que un objeto se ha movido 15 metros, se está hablando de una distancia; si en cambio se afirma que se ha movido 15 metros en dirección 40° noreste, se está tratando con un desplazamiento.

Un **vector** suele representarse en el plano cartesiano mediante una flecha, cuya longitud r es la magnitud del vector; la flecha hace un cierto ángulo con el eje positivo x, el cual suele representarse mediante la letra griega θ ("theta"), y se considera como la dirección del vector.

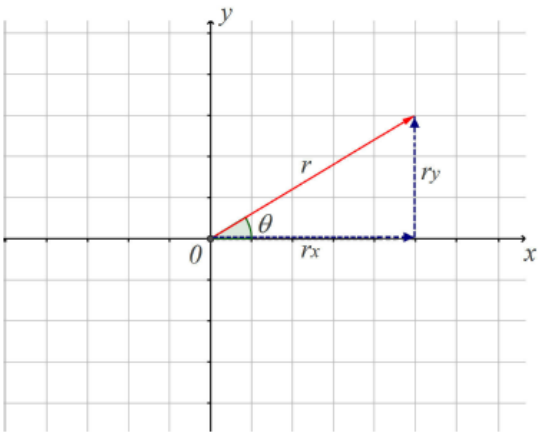


Figura 1.18 En rojo, un vector de magnitud r y dirección θ. En azul, las componentes axiales de este vector

Una característica importante de los vectores es que se pueden separar en *dos componentes*, una *horizontal* y otra *vertical*. Cuando esas componentes son paralelas a los ejes cartesianos, se les llama **componentes axiales**.

Por lo general, resulta más sencillo trabajar con las componentes de un vector que trabajar con el vector mismo, así que es necesario que aprendas a descomponer un vector en sus componentes axiales.

Revisa más de este tema en:
Ángulos es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas y Módulo 8** página 147.

Puedes observar el vector y sus componentes forman un triángulo rectángulo. En un triángulo rectángulo, los dos lados que forman el **ángulo recto** se llaman *catetos*, mientras que el tercer lado recibe el nombre de *hipotenusa*.

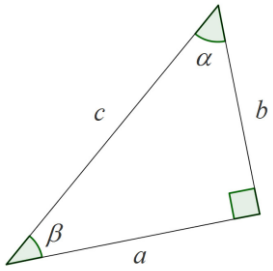
Ángulo recto: si dos rectas se cortan, se formarán entre ellas un total de cuatro ángulos. Si los cuatro ángulos son iguales, cada uno es un ángulo recto.

Un ángulo recto mide 90°, o $\frac{\pi}{4}$ rad

Ángulo agudo: cualquier ángulo cuya medida sea menor que la de un ángulo recto.

Ángulo llano: cualquier ángulo cuya medida sea igual a la de dos ángulos rectos, es decir, 180°.

Ángulo obtuso: cualquier ángulo cuya medida sea mayor a la de un ángulo recto, pero menor que la de un ángulo llano.



Para calcular las componentes de un vector requiere de elementos de Trigonometría. En Trigonometría se acostumbra diferenciar los dos catetos de un triángulo de la siguiente manera: se considera uno de los **ángulos agudos del triángulo**, y se dice que el cateto que queda frente a ese ángulo es el "*cateto opuesto*". El cateto que con la hipotenusa forma a ese ángulo, se llama "*cateto adyacente*".

Respecto al ángulo β ("beta"), el cateto opuesto es b, mientras que el cateto adyacente es a. Pero respecto al ángulo α ("alfa"), los papeles se invierten y a es el cateto opuesto, en tanto que b queda como el cateto adyacente.

Resulta que con los tres lados de un triángulo pueden formarse seis distintas razones, que se conocen como **razones trigonométricas**. Estas razones se definen respecto a uno de los ángulos agudos del triángulo, de modo que se pueda decir cuál es el cateto opuesto y cuál el adyacente.

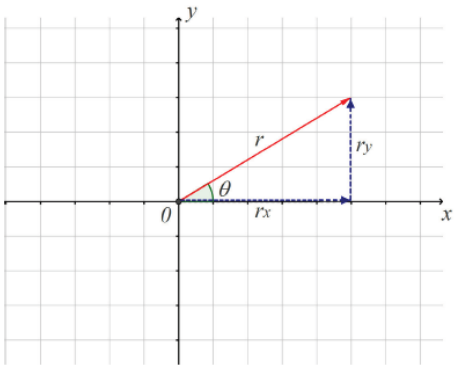
Las seis razones trigonométricas se muestran a continuación:

Las seis razones trigonométricas
Con los lados de un triángulo rectángulo se pueden formar seis razones. Cada una de ellas tiene un nombre propio; respecto al ángulo que se muestra en la figura, las seis razones son

Nombre	Abreviatura	Razón
Seno de α	sen α	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$
Coseno de α	cos α	$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$
Tangente de α	tan α	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$
Cotangente de α	cot α	$\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}}$
Secante de α	sec α	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$
Cosecante de α	csc α	$\frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$

Revisa más de este tema en:
Razones trigonométricas es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas.**

En el caso general, las componentes de un vector r como el de la siguiente figura se obtienen mediante expresiones similares a las que acabamos de encontrar:



$$r_x = r\ cos\theta$$
$$r_y = r\ sen\theta$$

Empleando ambas ecuaciones es posible calcular las componentes axiales de un vector, a partir de su magnitud r y su dirección θ.

Movimiento parabólico

En el movimiento parabólico, es necesario descomponer el movimiento en dos partes. La idea es que al hacerlo, su movimiento parabólico quede separado en dos componentes más sencillas, ***una horizontal y otra vertical***.

En la ***componente horizontal*** del movimiento, no interviene ninguna aceleración. Por lo tanto, esta componente es un *movimiento rectilíneo uniforme*.

En la ***componente vertical***, sólo interviene la aceleración de la gravedad. Por lo tanto, este componente es un *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*.

Empleando lo visto en la sección anterior y razonando con cuidado, descomponer el movimiento será muy sencillo.

Ejemplo:

Un jugador del *Manchester United* se encuentra en posesión del balón a 60 metros de la portería. Chuta y el balón sale disparado con un ángulo de 30° respecto al suelo, y con una velocidad inicial de 25 m/s (ver figura 1.21). ¿Llegará el balón hasta la portería?

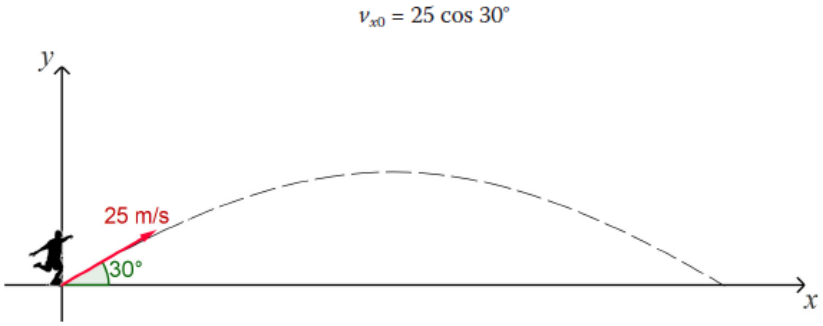


Figura 1.21

Solución:

Componente horizontal

Colocando el sistema de referencia como en la figura 1.21, la posición horizontal inicial del balón es cero. La componente horizontal de su velocidad inicial será (ver figura 1.22)

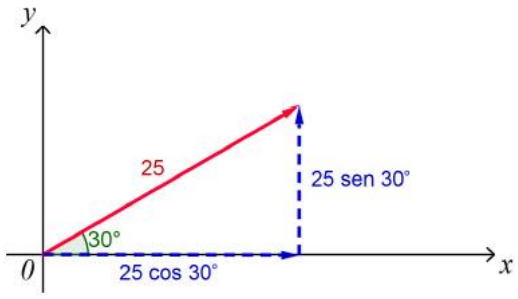


Figura 1.22

Continuación…

En la dirección horizontal, el balón recibe el impulso del jugador (que le proporciona su velocidad inicial) y luego no hay más agentes externos que influyan sobre su movimiento. Es decir, no hay ninguna aceleración. Entonces esta componente del movimiento es rectilíneo uniforme, así que la ecuación que lo describe será:

$$d_x = v_{x0}t + d_0$$

Sustituyendo:

$$d_x = 25\cos 30°t + 0$$
$$d_x = 25\cos 30°t$$

Componente vertical

Con el mismo sistema de referencia, la posición vertical inicial del balón también es cero. La componente vertical de la velocidad inicial será:

$$v_{y0} = 25\text{sen}30°$$

En la dirección vertical, el balón recibe el impulso del jugador (que le proporciona su velocidad inicial), comienza a moverse e inmediatamente comienza a actuar sobre él la aceleración de la gravedad, que lo jala hacia abajo. De este modo, esta componente del movimiento es acelerado, y su ecuación será:

$$d_y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{y0}t + d_{y0}$$

Sustituyendo los datos conocidos, tendremos:

$$d_y = \frac{1}{2}(-9.8)t^2 + 25\text{sen}30°t + 0$$
$$d_y = -4.9t^2 + 25\text{sen}30°t$$

Nota que la aceleración de la gravedad se colocó negativa: en nuestro sistema de referencia, la dirección “abajo” es negativa, mientras que “arriba” es positiva. Los signos cambiarán si en tu sistema de referencia elijes las direcciones de otra manera.

Hemos logrado descomponer el movimiento parabólico del balón en dos movimientos más sencillos. Las ecuaciones de cada uno son:

$$d_x = 25\cos 30°t$$
$$d_y = -4.9t^2 + 25\text{sen}30°t$$

Para responder la pregunta: ¿Llegará el balón hasta la portería?

Usamos esta última ecuación para determinar cuánto tiempo tardará el balón en llegar al suelo (momento en el cual, $d_y = 0$):

Continuación…

$$0 = -4.9t^2 + 25\text{sen}30°t$$
$$-4.9t^2 + 12.5t = 0$$

Resolviendo por fórmula general:

$$t = \frac{-12.5 \pm \sqrt{(12.5)^2 - 4(-4.90)(0)}}{2(-4.90)}$$
$$t = \frac{-12.5 \pm 12.5}{-9.8} = \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 2.55 \end{cases}$$

El primer valor ($t = 0$) corresponde simplemente al momento en que el jugador chuta. El segundo es el que nos interesa: el balón se mantiene en el aire durante 2.55 segundos.

¿Qué tan lejos llega en ese tiempo? Usemos la ecuación correspondiente a la componente horizontal del movimiento:

$$d_x = 25\cos 30°t$$

Sustituimos $t = 2.55$ y tenemos:

$$d_x = 25\cos 30°(2.55) = 55.21 \text{ metros}$$

Entonces, el balón caerá después de volar 55.21 metros. No llega hasta la portería, que se encontraba a 60 metros.

El análisis que hemos realizado es lo suficientemente rico como para permitirnos obtener más información sobre el movimiento del balón. Por ejemplo, podemos determinar cuál es la altura máxima que alcanza durante su vuelo; para ello, empleamos la ecuación que controla:

$$d_y = -4.9t^2 + 25\text{sen}30°t$$

Y buscamos las coordenadas de su vértice usando las fórmulas:

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{25 \text{ sen } 30°}{2(-4.90)} = 1.27$$
$$d_y = 1 - \frac{(25 \text{ sen}30°)^2}{4(-4.90)} = 8.97$$

Lo cual significa que a los 1.27 segundos de vuelo el balón alcanza su altura máxima de 8.97 metros.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 42 y 42 sobre **movimiento parabólico** de la página 85 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

UNIDAD 2. MOVIMIENTO CIRCULAR

¿Qué voy a aprender y cómo?

En la unidad anterior estudiaste dos tipos importantes de movimiento: el rectilíneo uniforme y el uniformemente acelerado. A partir de ellos nos fue posible analizar otros más sofisticados, como el tiro vertical y el tiro parabólico.

En esta segunda unidad abordaremos otra clase de movimiento que aparece frecuentemente en numerosas situaciones: el **movimiento circular**.

Si observas con atención notarás que efectivamente, hay muchos objetos moviéndose en trayectorias circulares por doquier: para empezar, nuestra civilización funciona gracias a toda clase de ruedas, engranes y mecanismos giratorios; además, algunos ejemplos menos evidentes se pueden encontrar en las curvas de los caminos y carreteras —que siguen la forma de un arco circular—, en el movimiento de rotación de la Tierra, en las impresionantes acrobacias de gimnastas y clavadistas, etcétera… Más aún, el movimiento circular es un caso particular del llamado movimiento armónico simple, que es el que se observa, por ejemplo, en un péndulo —bajo ciertas condiciones que estudiarás en su momento.

¿Puedes pensar en algún otro ejemplo de movimiento circular? ¿Cuáles?

El **movimiento circular** que puede ser uniforme y no uniforme, está involucrado en muchas situaciones reales: el movimiento de ruedas, motores, péndulos y otros artefactos, así como en fenómenos naturales como la rotación de los planetas.

¿Con qué propósito?

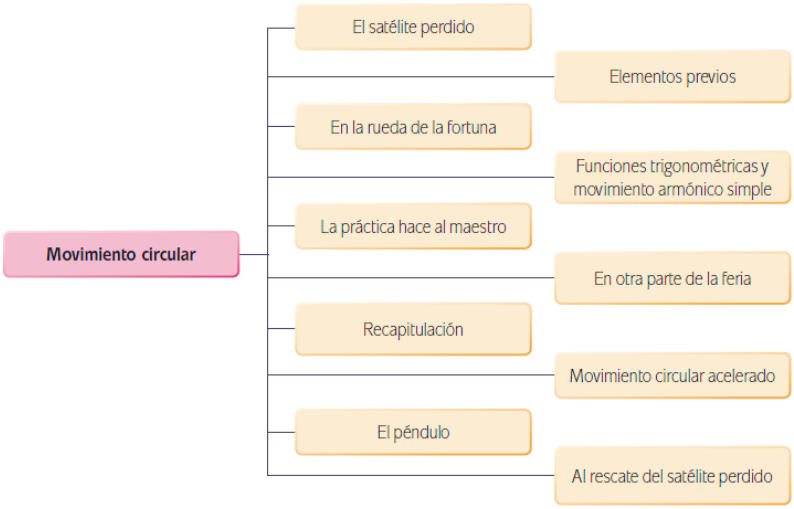
El propósito de esta unidad es que representes, interpretes y resuelvas situaciones problemáticas en las que se presenten procesos naturales vinculados con el movimiento rectilíneo, el movimiento circular y el movimiento armónico simple, aplicando conceptos tanto algebraicos como geométricos y trigonométricos.

¿Qué saberes trabajaré?

En esta unidad te enfrentarás a un nuevo tipo de movimiento, el movimiento circular (que puede ser uniforme y no uniforme), que está involucrado en muchas situaciones reales: el movimiento de ruedas, motores, péndulos y otros artefactos, así como en fenómenos naturales como la rotación de los planetas. Para estudiar este tipo de movimiento tendrás que familiarizarte con nociones provenientes de la Geometría como circunferencia, ángulo, longitud de arco, sector circular, y otras surgidas en la Física (periodo, frecuencia, amplitud). También profundizarás en el estudio de las ecuaciones lineales, las razones trigonométricas y las funciones trigonométricas; estas últimas te introducirán al llamado círculo unitario y a las identidades trigonométricas.

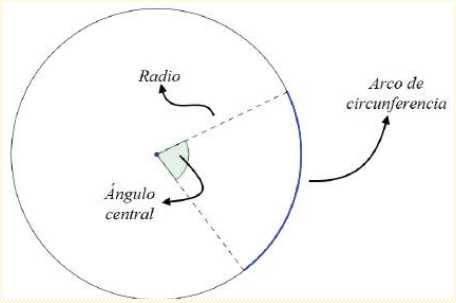
Aprenderás como analizar, cuantificar y registrar datos en distintos escenarios hipotéticos en los que intervengan elementos tanto constantes como variables, usarás métodos y representaciones algebraicas y gráficas para abordar movimientos circulares y armónicos simples, calculando velocidades lineales y angulares, así como periodos y frecuencias. También describirás este tipo de movimientos empleando tecnologías de la información y la comunicación.

Al mismo tiempo, continuarás desarrollando una actitud analítica, creativa, autónoma y sistemática.



Elementos previous

- Una **circunferencia** es una curva formada por todos los puntos que cumplen la siguiente condición: se encuentran todos a la misma distancia de otro punto fijo, el cual es llamado *centro de la circunferencia.*
- El **círculo** es la superficie que queda encerrada dentro de la circunferencia, que como acabamos de decir, es una línea curva.
- El **radio** de una circunferencia es un segmento de recta que va desde el centro de la circunferencia hasta un punto cualquiera perteneciente a ella.
- El **diámetro**, por su parte, es un segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia, pasando por su centro; la longitud del diámetro es el doble de la longitud del radio.
- El **perímetro** es la longitud del contorno de una figura geométrica cerrada. En el caso de la circunferencia, al perímetro suele llamársele así, "circunferencia", y se calcula mediante la formula $c = 2\pi r$.
- Un **ángulo** es la figura que se forma cuando dos segmentos de recta comparten un extremo. Los ángulos pueden medirse en grados (°), en radianes (rad), o en grados centesimales (grad).
- Un **ángulo central** es el que se forma entre dos radios de una circunferencia.
- Un **radián** es la medida de un ángulo central que queda determinado por *una longitud de arco* igual al radio de la circunferencia en cuestión.



Para calcular el área del círculo, se emplea la famosa fórmula $A = \pi r^2$.

En la rueda de la fortuna

Se puede obtener una **equivalencia entre grados y radianes** de la siguiente manera:

Un ángulo de 360° corresponde a un arco cuya longitud es la circunferencia entera; esta longitud (el perímetro de la circunferencia) es $2\pi r$. Desde luego, recuerda que la letra griega π (“pi”) se usa para representar un número que aproximadamente vale 3.14159.

Revisa más de este tema en:
Equivalencia entre grados y radianes es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas.**

Por otro lado, un ángulo que mida un radián corresponde a un arco cuya longitud es igual al radio r de la circunferencia.

Los ángulos de un radián que caben en un ángulo de 360° es $2\pi r / r = 2\pi$ veces. Entonces, ***360° equivalen a*** 2π ***radianes***. De la misma manera, se puede concluir que ***180° equivalen a*** π ***radianes***.

Ejemplo:

A cuantos radianes equivalen 60°.

Solución:

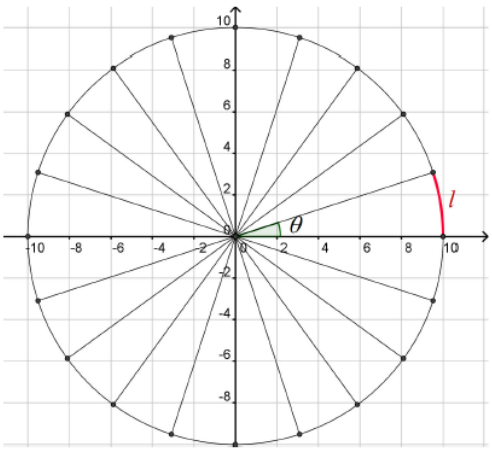
$$60° \times \frac{\pi \text{rad}}{180°} = \frac{60\pi}{180} \text{rad}$$

Al efectuar las operaciones los grados es cancelan, la fracción se puede simplificar de modo que:

$$\frac{60\pi}{180} \text{rad} = \frac{1}{3}\pi \text{ rad}$$

Aún tendríamos que efectuar la multiplicación de $1/3$ por el número π; sin embargo, se acostumbra no hacerlo, y dejar la medida en radianes expresada como un múltiplo de π.

De esta manera, 60° equivalen a $\frac{1}{3}\pi$ rad .



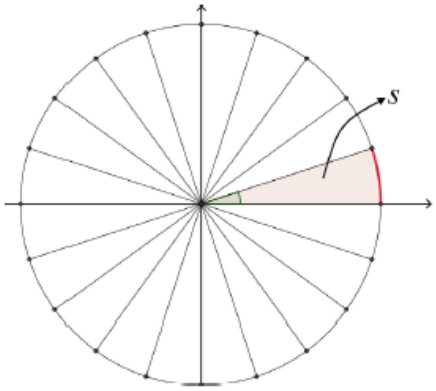
Donde:

θ es el valor del **ángulo**, el cuál es la medida de la apertura entre dos líneas rectas que coinciden en un punto.

l **longitud de la curva** (distancia de separación), esta curva es un **arco de circunferencia.**

Otro elemento importante en una circunferencia es el **sector circular** S determinado por un ángulo θ .

Un *sector circular* es la porción de un círculo limitada por un arco de circunferencia y por los lados de un ángulo central.



- Cuando hablamos de la **distancia** recorrida en un intervalo dado de tiempo, estamos hablando de la rapidez en un movimiento circular, esta rapidez se llama ***lineal o tangencial***, y para hallarla necesitamos determinar la distancia que recorre por unidad de tiempo.
- Si hablamos del **ángulo** recorrido en un intervalo dado de tiempo, estamos tratando con una nueva clase de rapidez: la ***rapidez angular***, que básicamente nos dirá cuánto crece el ángulo θ por unidad de tiempo.

Ejemplo:

Supongamos que la rueda da tres vueltas por minuto, tiene un radio de 10 m, así que al dar una vuelta una canastilla recorre, a lo largo de la circunferencia, ¿Cuál es la distancia que recorre?

Solución:

La distancia es de aproximadamente $2\pi r = 2(3.14)(10) = 62.8\ m$.

Esto significa que, de acuerdo con nuestra suposición, en un minuto la canastilla recorrerá (siempre a lo largo de la circunferencia) una distancia total de $62.8 \times 3 = 188.4\ m$. Así que su rapidez lineal será de:

$$\frac{188.4m}{60s} = 3.14\frac{m}{s}$$

El razonamiento para hallar su rapidez angular es exactamente el mismo, sólo que debes considerar el ángulo (no la distancia) recorrido por la rueda en ese minuto.

Movimiento circular

En un **movimiento circular**

La **rapidez lineal o tangencial** representa la distancia recorrida por el objeto móvil —que en este caso es una longitud de arco circular— por unidad de tiempo. Se calcula de la manera usual, dividiendo distancia recorrida entre tiempo empleado para recorrerla.

Análogamente, la **rapidez angular** representa el ángulo recorrido por el objeto móvil, por unidad de tiempo. La manera de calcularla es dividir el ángulo recorrido entre el tiempo empleado para recorrerlo.

En el movimiento circular hay otros dos parámetros que es conveniente conocer y comprender; se trata del periodo y la frecuencia del movimiento.

El **periodo** es el tiempo que le toma al objeto móvil volver a su posición inicial; este recorrido de ida y vuelta a la posición inicial se conoce como ***ciclo***, y es una característica distintiva del movimiento circular y del movimiento armónico simple.

La **frecuencia** es el número de ciclos que el objeto realiza, por unidad de tiempo.

Ejemplo:

Suponiendo que la rueda da tres vueltas en un minuto, y tomando en cuenta que el periodo es el tiempo en que una canastilla vuelve a su posición inicial (es decir, el tiempo en que la rueda da una vuelta completa), calcular el período y la frecuencia.

Solución:

El **período** sería: $\frac{60s}{3} = 20s$

Respecto a la **frecuencia**, sólo recuerda que se trata del número de ciclos (vueltas completas, en este caso) que se cumplen por unidad de tiempo. Si nuestra unidad de tiempo son los segundos y la rueda completa tres ciclos cada minuto (60 segundos), entonces la frecuencia es simplemente: $\frac{3}{60s} = 0.05 \text{ ciclos/segundo}$.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 6 sobre **periodo y frecuencia** de la página 99 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Ecuaciones del movimiento circular uniforme

La rapidez lineal en un movimiento circular se calcula dividiendo la longitud del arco circular recorrido entre el tiempo empleado para recorrer dicha longitud:

$$v = \frac{l}{t}$$

Donde estamos usando v para representar a la rapidez, l para la longitud del arco circular recorrido y t para el tiempo. Si ahora despejas l, llegarás a

$$l = vt$$

Considerando la posibilidad de que se comience su movimiento desde una posición "adelantada"; como en la figura 2.5.

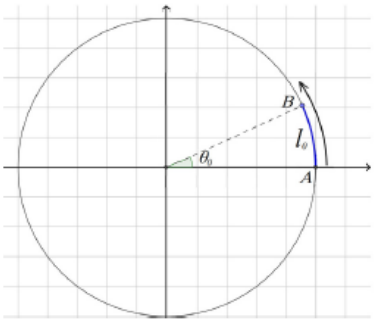


Figura 2.5 Modelo de la rueda de la fortuna. Sólo se han conservado la circunferencia que forma la rueda y dos posiciones hipotéticas para una de las canastillas

Tomaremos como "posición cero" la posición A en esta figura. Si por alguna razón al iniciar nuestro análisis no se encuentra en esa posición cero sino, digamos, en la posición señalada con la letra B, la ecuación $l = vt$ sólo nos dirá la longitud de arco a partir de esa posición adelantada; para hallar la longitud del arco que se ha recorrido sobre la rueda desde la posición cero, tendremos que sumar la longitud del arco correspondiente a la posición adelantada, la cual aparece en la figura 2.5 señalada como l_0. Simbólicamente, esto se escribe:

$$l = vt + l_0 \qquad \textit{Ecuación del movimiento circular uniforme (variables lineales)}$$

Compara esta ecuación con:

$$d = vt + d_0$$

que describía la distancia recorrida por un objeto en movimiento rectilíneo uniforme.

Ambas clases de movimiento (el rectilíneo uniforme y el circular uniforme) son análogas en muchos sentidos; los objetos móviles recorren ciertas distancias en determinados tiempos, a una rapidez constante. Sin embargo, es importante que diferencies claramente ambas ecuaciones: una se refiere a una distancia recorrida en línea recta, mientras que la otra habla de una distancia recorrida a lo largo de una circunferencia.

Además, a diferencia del movimiento rectilíneo uniforme, en el circular uniforme la distancia y el tiempo no son las únicas variables; también está el ángulo que el objeto móvil cubre en su trayectoria circular:

Emplea un argumento análogo al que llevó a la ecuación $l = vt + l_0$, refiriéndote esta vez a la rapidez angular ω (omega), al ángulo θ recorrido por una canastilla y al posible ángulo inicial θ_0 desde que se podría comenzar su movimiento, para deducir la ecuación:

$$\theta = \omega t + \theta_0 \qquad \text{Ecuación del movimiento circular uniforme (variables angulares)}$$

Ambas ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} l &= vt + l_0 \\ \theta &= \omega t + \theta_0 \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones del movimiento circular uniforme}$$

Ejemplo:

Supongamos que la rueda de la fortuna da tres vueltas por minuto, por lo que la velocidad lineal es de 3.14 m/s, y que inicialmente la canastilla se encontraba 15° por encima de la "posición cero"; calcular el ángulo que ha cubierto después de 1 minuto.

Solución:

Primero calculamos su longitud de arco inicial que es de aproximadamente:

$$l_0 = \frac{2\pi(10)(15°)}{360°} = 0.83\pi$$

Lo anterior implica que la ecuación: $l = vt + l_0$

Se convierte en: $l = 3.14t + 0.83\pi$

Entonces, después de un minuto (60 segundos) la canastilla habrá cubierto una longitud de arco de aproximadamente:

$$l = 3.14(60) + 0.83\pi = 188.4 + 2.61 = 191.01m$$

(Siempre recuerda que el número π vale aproximadamente 3.14159)

Para calcular el ángulo que ha cubierto se necesita el mismo razonamiento, pero empleando la ecuación:

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Bajo el mismo supuesto, la velocidad angular ω es de $\frac{\pi}{10} rad/s$ y la canastilla comienza su movimiento a partir de un ángulo inicial θ_0 que vale 15° sobre la "posición cero". Primero, convertimos estos 15° a radianes,

$$15° \times \frac{\pi \text{rad}}{180°} = \frac{15\pi}{180}\text{rad} = \frac{1}{12}\pi\text{rad}$$

Y ahora sustituimos la velocidad angular y este ángulo inicial en $\theta = \omega t + \theta_0$, quedando:

$$\theta = \frac{\pi}{10}t + \frac{1}{12}\pi$$

Después de un minuto (60 segundos), la canastilla habrá cubierto un ángulo de:

$$\theta = \frac{\pi}{10}(60) + \frac{1}{12}\pi = 6\pi + \frac{1}{12}\pi = \frac{73}{12}\pi \text{ rad}$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 8 sobre **unidades del SI para medir distancia y tiempo** de la página 133 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.



Al girar una rueda de la fortuna, las canastillas van alcanzando diferentes alturas sobre el suelo. Para ello es necesario analizar la evolución de la altura conforme transcurre el tiempo de rotación.

Para iniciar nuestro análisis es preciso colocar nuestro sistema de referencia, las más plausibles son las que se muestran en la siguiente figura:

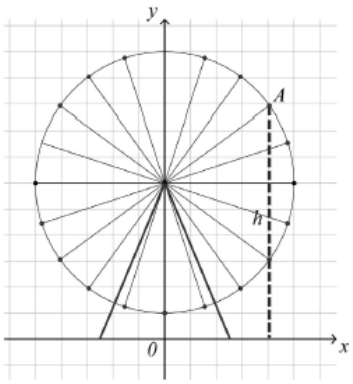


Figura 2.7 Rueda de la fortuna, con sistema de referencia colocado en el suelo, directamente debajo de su centro..

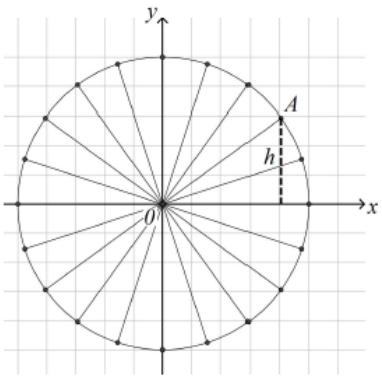
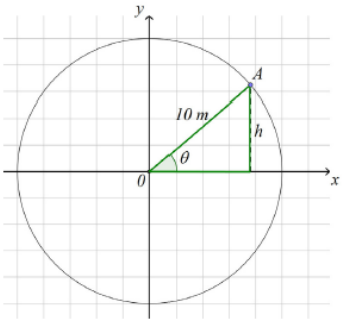


Figura 2.8 Rueda de la fortuna, con sistema de referencia colocado en el centro de la rueda.

Colocaremos el sistema de referencia como en la figura 2.8. Nota que las alturas que obtengamos en este sistema de referencia se medirán respecto al centro de la rueda, pero eso no es una desventaja; si quieres saber a qué altura sobre el suelo se encuentra la canastilla, simplemente suma la altura que obtengamos más la altura del centro de la rueda.



En esta figura hemos aislado la canastilla A; nos interesa calcular su altura h, respecto a la altura del centro de la rueda. Nota que se ha resaltado en verde el triángulo rectángulo que forman la altura, el radio de la rueda (que mide 10 metros) y la proyección de ese radio sobre el eje x de nuestro sistema de referencia.

Para calcular las componentes axiales del vector, emplear dos de las razones trigonométricas del ángulo θ que da dirección al vector:

$$r_x = r\cos\theta$$
$$r_y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Como podemos observar la altura h de la canastilla coincide con la componente r_y del vector r, de manera que podemos escribir:

$$h = 10\,\mathrm{sen}\,\theta$$

al girar la rueda, la altura h y el ángulo θ son variables; la ecuación anterior establece que entre ellas existe una relación que permite, conociendo θ, calcular h (y viceversa, al menos en principio); es decir, $h = 10\,\mathrm{sen}\,\theta$ representa la función ángulo-altura para la canastilla A.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 10 **sobre circunferencias** de la página 107 de la versión electrónica correspondiente a este módulo.

Funciones trigonométricas y el círculo unitario

Una función como la representada por la ecuación: $h = 10\,\mathrm{sen}\,\theta$

Las funciones trigonométricas involucran (como su nombre lo indica) razones trigonométricas de alguna de las variables, y se caracterizan por presentar ciclos que se repiten indefinidamente, cada vez que la variable independiente (en este caso, el ángulo θ) llega a ciertos valores.

El intervalo que esa variable debe recorrer para que se cumpla un ciclo se llama ***periodo*** de la función; esta característica hace que a las funciones trigonométricas también se les llame ***periódicas***.

Una manera útil de concebir a las funciones trigonométricas es mediante lo que se conoce como el círculo unitario. Observa la siguiente figura. El punto A está colocado sobre la circunferencia del círculo, posibilitando la construcción del triángulo en azul cuya hipotenusa es el radio del círculo, y cuyos catetos son las coordenadas (b, c) del punto A. Empleando este círculo (cuyo radio vale 1, de donde le viene el nombre de "unitario"), las seis funciones trigonométricas del ángulo α se pueden definir como sigue:

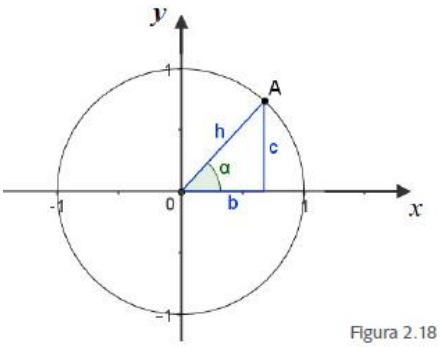


Figura 2.18

$$\mathrm{sen}\,\alpha = c$$
$$\cos\alpha = b$$
$$\tan\alpha = \frac{c}{b}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{b}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{c}$$

Revisa más de este tema en:

Razones trigonométricas es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas.**

(Recuerda que la hipotenusa del triángulo es el radio del círculo, y vale 1).

Considera la función $y = \text{sen}\,\alpha$, empleando el circulo unitario determinaremos su gráfica.

Puedes darte una buena idea del aspecto de su gráfica empleando el círculo unitario.

Cuando el ángulo a vale cero, las coordenadas del punto A son (1, 0). Es decir, su coordenada c es cero. Esto significa que $\text{sen}\,\alpha$ también vale cero.

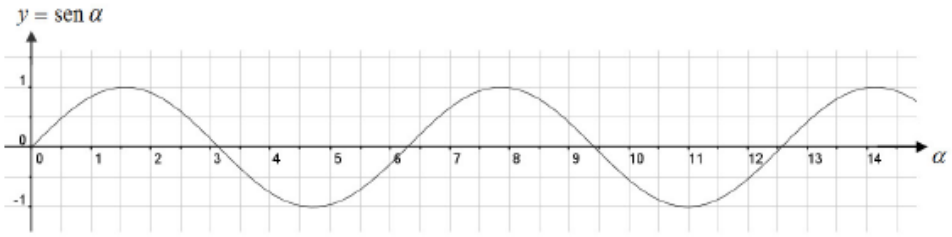
Conforme el punto A comience a moverse a lo largo de la circunferencia en sentido contrario a las manecillas del reloj, ocurrirá que a también aumentará su valor, al tiempo que lo hace la coordenada c. Por lo tanto, $\text{sen}\,\alpha$ aumentará también, situación que se mantendrá hasta que a llegue a los 90° (o lo que es lo mismo, $\pi/2$). En esa posición, la coordenada c del punto A valdrá 1 y ese será el máximo valor que alcanzará $\text{sen}\,\alpha$.

A continuación, cuando A siga trasladándose sobre la circunferencia, a seguirá creciendo pero la coordenada c comenzará a disminuir, con lo que también disminuirá $\text{sen}\,\alpha$. Esto continuará así hasta que a alcance los 270° (o $3\pi/2$ rad). En ese momento, $\text{sen}\,\alpha$ llegará a su mínimo valor, –1.

Si el desplazamiento de A continúa, $\text{sen}\,\alpha$ comenzará a aumentar de nuevo, desde –1 hasta volver al punto de partida, cuando a valga 360° (equivalentes a 2π rad). En ese punto, $\text{sen}\,\alpha$ valdrá cero de nuevo, y se habrá cumplido una primera vuelta al círculo unitario: un primer ciclo, un primer periodo.

Ese comportamiento comenzará a repetirse si la rotación de A sigue adelante: $\text{sen}\,\alpha$ aumentará hasta llegar a 1, luego decrecerá hasta –1 y de ahí subirá de nuevo a cero cuando A complete una vuelta más al círculo unitario.

Todo ello dará como resultado una gráfica:



Observa que en esta gráfica, $\text{sen}\,\alpha$ varía entre 1 y -1, a diferencia de la que obtuviste en la sección precedente, que variaba entre 10 y -10. Por otro lado, fíjate que en esta gráfica α se ha expresado en radianes (siendo que antes se le había expresado en grados). Ello hace que los ciclos de la gráfica no se cumplan cada 360°, sino cada 2π rad: es decir, cada 6.28 unidades, aproximadamente (recuerda cuánto vale el número π).

Funciones trigonométricas y movimiento armónico simple

Una función trigonométrica, como las que acabamos de analizar:

$$h = 10\,\text{sen}\,\theta$$
$$y = \text{sen}\,\alpha$$

Se caracteriza por que la variable dependiente ("h" en el primer caso; "y", en el segundo) se comporta oscilando entre un valor máximo y un valor mínimo, a partir de una "posición de equilibrio". En el primer caso, los valores máximo y mínimo eran 10 y –10 respectivamente, alrededor de la posición de equilibrio $h = 0$; en el segundo los valores máximo y mínimo fueron 1 y –1, alrededor de la posición de equilibrio $y = 0$.

A la magnitud de la máxima desviación de la variable dependiente a partir de dicha "posición de equilibrio", se le llama ***amplitud*** de la función.

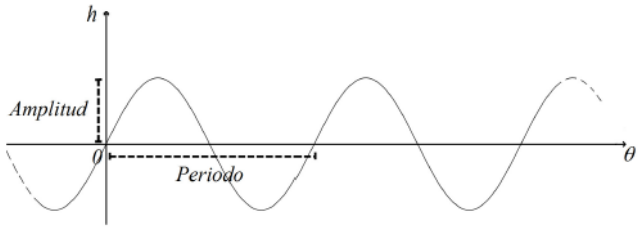


Figura 2.20 La gráfica de una función trigonométrica. El periodo es el intervalo que debe cubrir la variable independiente (en este caso, θ) para que un ciclo se repita. La amplitud es la magnitud de la máxima desviación de la variable dependiente (h, en este caso) a partir de su "posición de equilibrio".

Un movimiento que queda descrito por una función de las características recién señaladas, se llama **armónico simple**.

Profundizando en las funciones trigonométricas

Vuelve por un momento a la ecuación

$$h = 10\operatorname{sen}\theta$$

donde, h representaba la altura de una de las canastillas de la rueda de la fortuna. Esta ecuación describe la forma en que dicha altura varía conforme el ángulo θ va cambiando, como resultado del giro de la rueda. Cuando se habla de funciones trigonométricas, al ángulo θ se le denomina "argumento" de la función y se mide en grados. Por otra parte, en la sección *Funciones trigonométricas y el círculo unitario*, se trabajó con el argumento expresado en radianes.

Esta última opción resulta más conveniente, pues un radián es lo que se conoce como un número real puro, mientras que los grados no lo son. Esto hace que el hecho de emplear grados traiga dificultades cuando se quiere trabajar con funciones trigonométricas en aplicaciones matemáticas a nivel profesional, dificultades que desaparecen si los argumentos se manejan en radianes.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza las actividades 12, 13 y 14 sobre **funciones trigonométricas** de la página 117 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

No olvides que:

En una función trigonométrica de las formas:

$$y = a\,\text{sen}\,x,\ y = a\cos x$$

donde "a" es una constante, el periodo en radianes es igual a 2π, mientras que la amplitud viene dada por el valor de la constante "a".

Por ejemplo, en la ecuación $h = 10\,\text{sen}\,\theta$, el valor de la constante "a" era 10, que efectivamente es igual a la amplitud de la función involucrada.

El periodo

Hay dos últimas cuestiones que es importante abordar respecto a las funciones trigonométricas; ambas surgen directamente de

$$h = 10\,\text{sen}\,\theta$$

Dado que la rueda de la fortuna exhibe un movimiento circular uniforme, el ángulo q aumenta continuamente de acuerdo con la ecuación

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

en donde ω es la rapidez angular del movimiento y θ_0 es el ángulo inicial en el que se encontraba la canastilla al comenzar el giro. Si en la ecuación $h = 10\,\text{sen}\,\theta$ sustituimos θ por esta última expresión, tendremos:

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 15 sobre **periodos de las funciones** de la página 120 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Retomando:

En una función trigonométrica de las formas:

$$y = \text{sen}(\omega x),\ y = \cos(\omega x)$$

el valor de la rapidez angular ω determina el periodo T de la función, mediante la fórmula:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La fase

Considera las ecuaciones: $h = a\,\text{sen}(\omega t - \theta_0)$

$h = a\cos(\omega t + \theta_0)$

donde:

a es la amplitud de la función.

θ_0 ángulo inicial desde el cual comenzaba su movimiento.

Si se inicia el movimiento desde un ángulo inicial de $\theta_0 = 0$ la gráfica que representará este movimiento tendrá el siguiente aspecto:

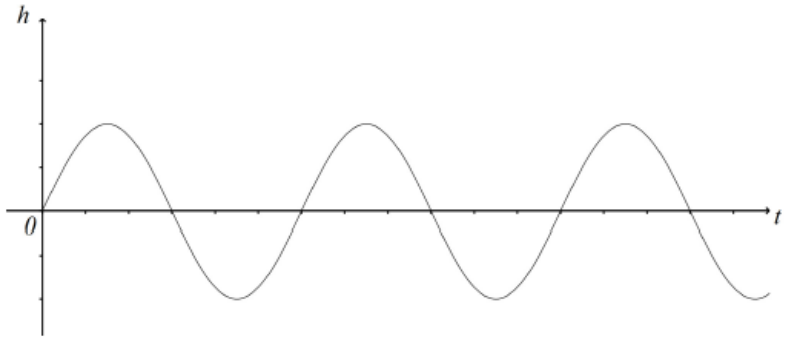
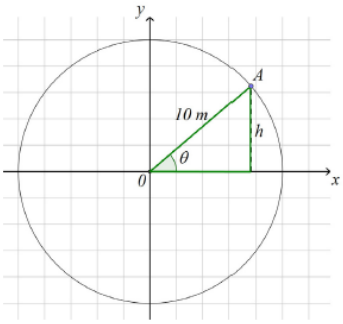


Figura 2.21 La gráfica t vs. h de una canastilla que arranca el movimiento desde un ángulo inicial $\theta_0 = 0$.

En el instante $t = 0$, la canastilla está en $\theta_0 = 0$, lo cual significa que su altura h desde el centro de la rueda también es cero. En ese instante la rueda se pone en movimiento, la variable tiempo comienza a avanzar mientras el ángulo también aumenta, y la canastilla se eleva hasta que θ alcanza los $\pi/2$ radianes, momento en el cual comienza a bajar hasta que alcanza su altura mínima cuando θ vale $3\pi/2$ radianes, etc.



Partiendo de las funciones: $h = a\,\text{sen}(\omega t + \theta_0), h = a\cos(\omega t + \theta_0)$ e introduciendo la nueva variable $u = \omega t + \theta_0$. Ello convertirá ambas funciones en:

$$h = a\,\text{sen}(u)$$
$$h = a\cos(u)$$

Entonces, el ciclo de cada una de ellas comenzará cuando $u = 0$ y terminará cuando $u = 2\pi$. Es decir:

• El ciclo comienza cuando $\omega t + \theta_0 = 0$.

• El ciclo termina cuando $\omega t + \theta_0 = 2\pi$.

Al despejar a t , obtendremos que:

• El ciclo comienza cuando $t = -\dfrac{\theta_0}{\omega}$.

• El ciclo termina cuando $t = \dfrac{2\pi}{\omega} - \dfrac{\theta_0}{\omega}$

Para obtener el periodo se debe calcular la diferencia entre el punto de inicio del ciclo y el punto del término del ciclo:

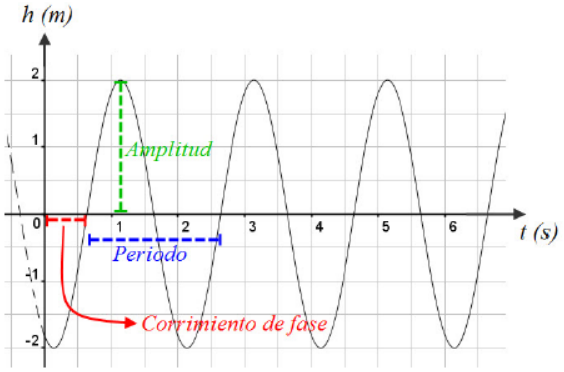
$$T=\left(\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\theta_0}{\omega}\right)-\left(-\frac{\theta_0}{\omega}\right)=\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\theta_0}{\omega}+\frac{\theta_0}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

Es decir, la presencia de θ_0 no altera el periodo de estas funciones

Ejemplo:

De la gráfica de la función $h=2\text{sen}\left(\pi t-2\right)$, en la que h se mide en metros y t en segundos, se muestra a continuación:



Determinar la amplitud, periodo y corrimiento de fase.

Solución:

Puedes ver cómo la amplitud de la gráfica es de 2 m.

El periodo es $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2\ s$.

Presenta un corrimiento de fase de $\varphi=-\frac{(-2)}{\pi}=0.64\ s$, que al ser positivo, es hacia la derecha.

En una función trigonométrica de las formas:

$$y=a\,\text{sen}\left(\omega x+\theta\right),\ y=a\cos\left(\omega x+\theta_0\right)$$

el ángulo inicial θ_0 genera gráficamente lo que se conoce como un **corrimiento de fase** φ, corrimiento que se puede calcular mediante la expresión:

$$\varphi=-\frac{\theta_0}{\omega}$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 17 y 18 sobre **funciones trigonométricas** de la página 126 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Resumen de Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}\alpha = c \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\cos\alpha = b \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{c}{b} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{b} \qquad \sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{c}$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 19 sobre **funciones trigonométricas** de la página 127 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Ejemplo:

Considera lo que sucedería si la ecuación del movimiento fuera $y = 3\cos(4t + 2)$.

Solución:

De acuerdo con las técnicas que se exploraron en las secciones anteriores, su periodo se puede calcular mediante la fórmula $T = \frac{2\pi}{\omega}$, que en este caso da $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. En otras palabras, ese movimiento completará un ciclo cada $\pi/2$ (aproximadamente 1.57) segundos.

Inspeccionando la ecuación, se observa que la amplitud del movimiento es de 3 metros (suponiendo que las medidas se están manejando en esas unidades), así que el diámetro de la trayectoria circular a lo largo de la cual se mueve la válvula sería de 6 metros.

Finalmente, la presencia del término "+ 2" en el argumento de la función indica que en este caso sí hay un corrimiento de fase, el cual podemos calcular mediante la fórmula $\varphi = -\frac{\theta_0}{\omega}$.

En este caso, la fórmula dará $\varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

Recapitulando:

Si lo reflexionas un momento, notarás que existe una manera de obtener **la rapidez lineal a partir de la rapidez angular de un objeto en rotación**. Veamos:

Recordemos que la rapidez angular ω representa el ángulo recorrido por un objeto en su trayectoria circular, por unidad de tiempo. Es decir, $\omega = \frac{\theta}{t}$.

Ahora bien, si T es el periodo del movimiento en cuestión, entonces la expresión anterior implica que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

pues en un tiempo T el objeto da una vuelta completa.

Por otro lado, la rapidez lineal es la distancia recorrida por el objeto, a lo largo de su trayectoria circular, por unidad de tiempo.

El objeto recorre la circunferencia completa (de longitud $2\pi r$) en un tiempo T, de modo que podemos expresar a la rapidez lineal como:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Al comparar ambas expresiones, se vuelve evidente que rapidez angular y rapidez lineal están relacionadas de la siguiente manera:

$$v = \omega r$$

Donde r es el radio de la circunferencia a lo largo de la cual tiene lugar el movimiento.

En un movimiento circular que ocurre a lo largo de una trayectoria de radio r, la rapidez lineal y la rapidez angular están relacionadas mediante la fórmula

$$v = \omega r$$

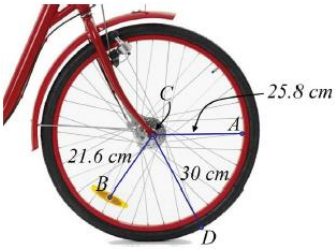
ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 22 y 23 **sobre rapidez angular y lineal** de la página 132 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Movimiento circular acelerado

En realidad, cualquier movimiento circular involucra una aceleración. Consideremos la siguiente situación.

Si subimos a una bicicleta y arrancamos del reposo (es decir, con una rapidez cero) hasta alcanzar una velocidad (que después se mantiene constante) de 20 m/s en 5 s, entonces la rapidez lineal inicial de los puntos A, B y D de la figura será cero. Lo mismo podemos decir respecto a sus rapideces angulares.



Pero en el instante que se comienza a pedalear, lo cual la lleva desde el reposo (rapidez cero) hasta una rapidez de 20 m/s. Le toma 5 s lograrlo. Esto significa que tanto la rapidez lineal como la rapidez angular de cada uno de los puntos A, B y D experimentó un incremento en un tiempo determinado. Es decir, hubo una aceleración (y no estamos hablando de la aceleración que se presenta en todo movimiento circular). Es esta clase de movimiento la que se conoce como movimiento circular acelerado.

ACTIVIDAD:
Realiza la actividad 24 de la página 137 sobre **aceleración** de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Relación entre la aceleración lineal y la angular

La aceleración lineal a es el cambio en la velocidad lineal dividido entre el tiempo en que ocurre dicho cambio. Es decir, si un movimiento circular se lleva a cabo inicialmente con una velocidad lineal v_i y luego cambia a una velocidad final v_f durante un tiempo t, entonces la aceleración lineal quedará expresada por:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

De un modo análogo, la aceleración angular a_θ se puede escribir como

$$a_\theta = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

Pero como las velocidades lineal y angular se relacionan por la fórmula

$$v = \omega r$$

La expresión para la aceleración lineal se puede reescribir como

$$a = \frac{\omega_f r - \omega_i r}{t}$$

Continuación…

Al factorizar el radio r, se tiene

$$a = \left(\frac{\omega_f - \omega_i}{t} \right) r$$

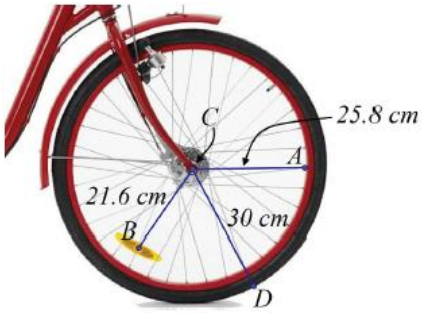
Comparando esto con la fórmula para la aceleración angular a_θ, se concluye que:

$$a = a_\theta r$$

Con esta fórmula, en un movimiento circular que ocurre a lo largo de una trayectoria de radio r, la aceleración lineal y la aceleración angular están relacionadas.

Ejemplo:

Supongamos que se parte desde el reposo hasta los 15 m/s de rapidez lineal en 6 segundos. Concentrémonos en el punto D, de la siguiente figura. Calcular la aceleración angular.



Solución:

La rapidez lineal de este punto D también comenzó siendo cero, y terminó siendo de los mismos 15 m/s. Entonces su aceleración lineal es simplemente de $\frac{15-0}{6} = 2.5\ m/s^2$.

Por otra parte, su rapidez angular comenzó valiendo cero, mientras que al final fue de:

$$\frac{15}{0.3} = 50\ rad/s^2$$

De esta manera, su aceleración angular es:

$$\frac{50-0}{6} = 8.33\ rad/s^2$$

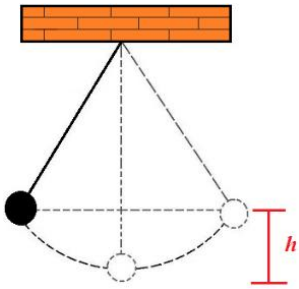
El péndulo



Los **péndulos** se encuentran entre los artefactos más sencillos y a la vez más importantes en la historia de la civilización. Básicamente, cualquier peso que cuelgue de algún soporte fijo de manera que pueda oscilar libremente entre dos posiciones, es un péndulo.

Los péndulos constituyeron la primera forma de medir el tiempo con un grado de precisión suficiente como para permitir un mejor estudio de este y muchos otros fenómenos naturales; gracias a cierta propiedad característica de todos los péndulos, se les empleó en la construcción de los primeros relojes, con los cuales fue posible realizar mediciones de tiempo más y más precisas.

Movimiento armónico simple en el péndulo



Si las oscilaciones son pequeñas, el péndulo presentará un movimiento armónico simple. El movimiento arriba-abajo estará determinado por la oscilación del péndulo entre su punto más alto y su punto más bajo. Este movimiento es periódico, de manera que se puede describir mediante una función trigonométrica como las representadas por las ecuaciones:

$$h = a\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \theta_0\right)$$

$$h = a\cos\left(\omega t + \theta_0\right)$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 26 sobre **movimiento** de la página 140 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

NOTA: Realiza el cierre de la unidad que viene en la página 141.

UNIDAD 3. DINÁMICA DEL MOVIMIENTO

¿Qué voy a aprender y cómo?

¿Dinámica? Sí, dinámica. En las dos unidades anteriores, has estudiado algunas clases importantes de movimiento. Has analizado varias de sus características (rapidez, velocidad, aceleración…) las has descrito mediante ecuaciones, tablas y gráficas, incluso has realizado predicciones sobre la posición que un objeto ocuparía después de determinado tiempo, o sobre el tiempo que le tomaría recorrer una distancia determinada, todo en circunstancias por demás variadas.

Ha sido un trabajo duro pero lo has hecho de maravilla (como lo evidencia el hecho de que estés leyendo esto).

Sin embargo, algo de lo que no has abordado hasta ahora son las **causas del movimiento**: ¿qué es lo que hace que un objeto se mueva? ¿Bajo qué condiciones ocurrirá un movimiento, y en qué forma ocurrirá? ¿Es posible que algo se mueva para siempre?

La **Dinámica** es una rama de la Física que aborda y da respuesta a ese tipo de preguntas: es el estudio del movimiento, ocupándose de sus causas (cuando se estudia el movimiento sin preocuparse por sus causas, se está hablando de cinemática). Gracias a esta disciplina fue posible comprender la forma en que un objeto más pesado que el aire podía volar, el modo en que debían diseñarse los cohetes con los que el ser humano llegó a la Luna y los automóviles que transportan a millones de personas todos los días, entre muchos otros avances que han dado forma a nuestra civilización.

¿Con qué propósito?

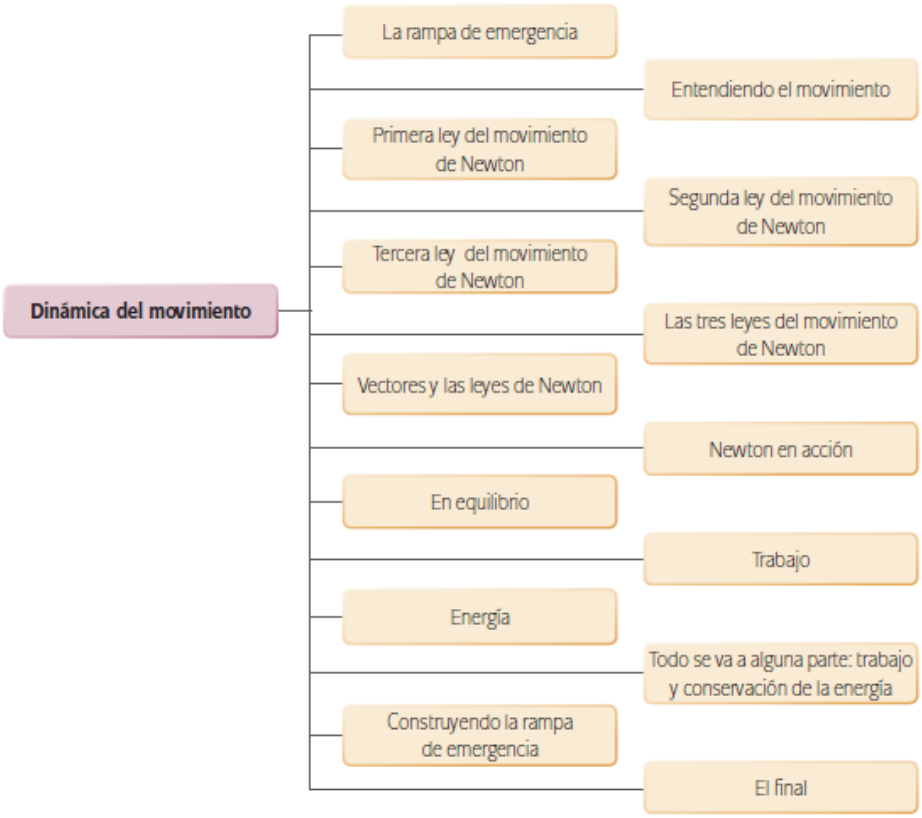
En esta última unidad, abordarás los conceptos más importantes de la dinámica. Este estudio, unido a lo que has trabajado en las dos unidades anteriores, te ayudará a desarrollar una mejor comprensión del movimiento en sus múltiples facetas. El propósito de la unidad es que analices y resuelvas problemas prácticos relacionados con las **leyes de Newton, el trabajo, la potencia y la energía mecánic**a, empleando dichas ideas físicas así como **modelos matemáticos** aplicados de manera científica en múltiples fenómenos físicos observables en tu vida cotidiana.

¿Qué saberes trabajaré?

El estudio de la dinámica del movimiento te llevará a encontrarte con diferentes conceptos importantes, algunos ya conocidos y otros que quizá resultarán novedosos: unos provenientes de las matemáticas, como la diferencia entre una **magnitud escalar y una vectorial, vectores y sus propiedades, identidades y funciones trigonométricas**; otros, provenientes de la física, como las **leyes del movimiento de Newton, las nociones de fuerza, fricción, trabajo, potencia, energía** y las unidades empleadas para expresarlas.

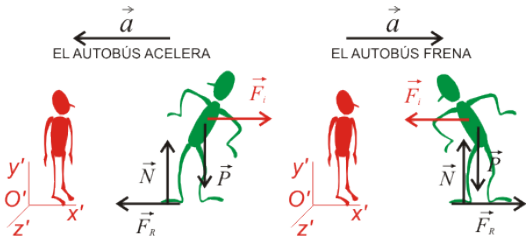
Emplearás las características de los vectores para —tanto gráfica como algebraicamente— aplicarlos en la descripción de fuerzas y en la resolución de problemas, usando al mismo tiempo **razones y funciones trigonométricas** al manipular cantidades vectoriales. Analizarás cómo la fricción es una fuerza que surge del contacto de dos materiales, y notarás cómo las **tres leyes de Newton** aparecen en situaciones de la vida cotidiana, y permiten analizarlas con mayor profundidad.

Aprenderás el significado que en física se le da a la palabra “trabajo”, y cómo ese importante concepto da lugar a la noción de potencia y se relaciona íntimamente con la idea de energía mecánica, de la cual estudiarás dos tipos: cinética y potencial.



Fue ***Galileo Galilei*** quien descubrió que el problema principal estaba en suponer que para mantener un cuerpo en movimiento hacía falta aplicarle una fuerza, y propuso que en realidad, un objeto que estuviera moviéndose con rapidez constante continuaría haciéndolo, a menos que una fuerza se opusiera a ello; del mismo modo, un objeto en reposo permanecería en reposo, a menos que una fuerza lo hiciera moverse.

Esta importantísima idea llevó al concepto de **inercia**: la tendencia de un objeto a mantenerse en su estado actual de movimiento, si no actúa sobre él alguna fuerza que se oponga a ello.



Algunos ejemplos de ocasiones donde se experimenta inercia: cuando vas en un transporte público y el chofer frena bruscamente, sientes un "empujón" hacia adelante porque tu cuerpo "trata" de mantenerse en movimiento. Cuando el transporte está estacionado y de forma brusca el chofer acelera, sientes un "jalón" hacia atrás: tu cuerpo "trata" de mantenerse en reposo. Tu cuerpo "trata" de mantener su estado actual de movimiento, a menos que alguna fuerza (en este caso, proporcionada por el motor del transporte) se oponga a ello.

Isaac Newton (1643-1727) fue una de las personalidades más extraordinarias que ha visto el mundo. Matemático, filósofo, teólogo, inventor y alquimista inglés, refinó las ideas de Galileo y logró establecer las tres leyes que llevan su nombre, leyes que bastan para explicar prácticamente todo el movimiento en la naturaleza y que impulsaron el desarrollo

de la tecnología hasta los increíbles niveles que vemos hoy. El concepto de la inercia, como verás en un momento, quedó incluido en la llamada primera ley de Newton. Las otras dos leyes hablan sobre la influencia de las fuerzas en el movimiento de los objetos.

Revisa más de este tema en:

Leyes de Newton es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 9** página 115.

Primera ley del movimiento de Newton



La primera ley de Newton, también conocida como ley de la inercia y ella habla de los cuerpos en movimiento.



La primera ley del movimiento de Newton establece qué es lo que ocurrirá con un objeto (en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme) si ninguna fuerza actúa sobre él. Establece que se mantendrá en reposo, a menos que una fuerza se oponga a ello.

Segunda ley del movimiento de Newton

La fuerza que aplicas al objeto le imparte una aceleración.

La segunda ley de Newton relaciona fuerza y aceleración; expresa en un sólo enunciado la resistencia de la masa a acelerar, y el papel de la fuerza como generadora de aceleración.

Una de sus implicaciones es que la **aceleración** también es un vector. Su dirección siempre es la misma que la de la fuerza neta aplicada sobre el objeto en cuestión.

Masa y peso

A primera vista, “masa” y “peso” pueden parecer sinónimos. Sin embargo, no lo son. Comprender las leyes de Newton requiere que antes de continuar, tengas claro qué significa cada concepto, cómo se relacionan y cuáles son las diferencias entre ellos.

Fuerza neta

Cuando la primera ley de Newton afirma que un objeto mantendrá su estado actual de movimiento (sea este rectilíneo uniforme o de reposo) a menos que una fuerza se oponga

a ello, se está refiriendo a la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo: la fuerza total, la suma de todas las fuerzas que incidan sobre el objeto.

También la segunda ley se refiere a la fuerza neta: cuando afirma que una fuerza aplicada sobre un objeto le imparte una aceleración que es inversamente proporcional a su masa, está refiriéndose a la fuerza neta que actúa sobre el objeto.

La primera y la segunda leyes están relacionadas íntimamente si lo piensas en términos de fuerza neta: si la fuerza neta es cero, entonces el cuerpo no recibe ninguna aceleración (segunda ley) y por lo tanto se mantiene en su estado actual de movimiento (primera ley).

Tercera ley del movimiento de Newton

Fricción

Cuando tratas de empujar un objeto sobre una superficie, la fuerza que ejerces sobre el objeto no es la única en juego, en total hay cuatro fuerzas actuando sobre el, contando la que tú ejerces sobre él para empujarlo.

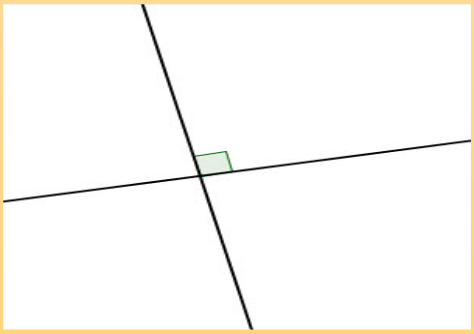
Para lograr que el objeto se mueva, debes primero vencer una fuerza de fricción, o rozamiento, que el objeto experimenta por su contacto con la superficie de la mesa. Esta fuerza se opone al movimiento, y no tiene que ver con la inercia: la fricción proviene del contacto de dos superficies y se opone siempre al deslizamiento de una de ellas sobre la otra.

Para comprender mejor la fricción, primero hay que analizar otras fuerzas involucradas en esta situación:

Mientras el objeto yace sobre la superficie, la gravedad de la Tierra ejerce sobre él una fuerza que lo jala hacia abajo; se trata del peso del objeto. Por supuesto, el objeto no acelera hacia abajo porque la superficie ejerce sobre él una fuerza de contacto hacia arriba, que al ser de igual magnitud pero con dirección opuesta al peso del objeto, lo equilibra y da por resultado que permanezca en reposo.

La fuerza que ejerce la superficie sobre el objeto se llama ***fuerza normal***, y es directamente proporcional a la fricción: un objeto muy pesado hará que la superficie ejerza sobre él una fuerza normal grande, y la fricción será correspondientemente grande; sobre un objeto más ligero actuará una fuerza normal menor, por lo que la fricción también será más pequeña.

Normal: en Geometría, la palabra “normal” es sinónimo de “perpendicular”. Dos rectas son normales si al cortarse forman ángulos rectos.



El hecho de que la fricción y la fuerza normal sean directamente proporcionales permite escribir:

$$fr = \mu N$$

en donde fr es la fuerza de fricción, N es la fuerza normal, y μ (la letra griega “mu”) es la constante de proporcionalidad entre ambas, que en este caso se denomina ***coeficiente de fricción***. Bajo ciertas condiciones, el valor de μ depende del tipo de superficies involucradas, y existen tablas especializadas que consignan distintos valores de μ para varias parejas de superficies. Conviene señalar que μ es lo que se conoce como una cantidad adimensional: no tiene unidades.

Así que las cuatro fuerzas que actúan sobre la superficie cuando lo empujas son:

1. La que ejerces sobre él al empujarlo.

2. La fuerza de fricción, que se opone al movimiento y es la responsable de que el objeto se detenga cuando lo dejas de empujar.

3. El peso del objeto, que la Tierra ejerce sobre él a través de la atracción gravitacional.

4. La fuerza normal que la superficie ejerce sobre el objeto.

Ejemplo:

Encontrar la fuerza de fricción, si 1 kg de corcho se deslizara sobre una superficie de metal.

Solución:

La fricción que se opondría al movimiento quedaría determinada por la ecuación:

$$fr = \mu N$$

recuerda que la fuerza normal es igual al peso del objeto, pues de lo contrario éste no se encontraría en equilibrio y sucedería una de dos cosas: se hundiría en la superficie, o saldría disparado hacia arriba. El coeficiente de fricción cinética para corcho sobre metal es de aproximadamente 0.4

Por lo tanto, la ecuación se convertirá en:

$$fr = 0.4\left(9.81 {}^{m}\!/\!_{s^2}\right)(1kg) = 3.92 \text{ N}$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 12 sobre **fracción cinética** de la página 160 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Las tres leyes del movimiento de Newton

Ya hemos visto las tres importantes leyes que gobiernan prácticamente cualquier tipo de movimiento —dentro de límites que sólo se descubrirían con la llegada de dos teorías revolucionarias: la Teoría de la Relatividad de Einstein y la mecánica cuántica, ambas durante la primera mitad del siglo XX.

Examinemos ahora cada una de ellas:

Primera ley: Inercia

Un objeto que se mueve con velocidad constante se mantendrá en ese estado, a menos que incida sobre él una fuerza neta distinta de cero.

Recuerda que la velocidad es un vector, por lo que decir “velocidad constante” es prácticamente equivalente a decir “movimiento rectilíneo uniforme”, con una pequeña excepción: “velocidad constante” también incluye el caso en el que la velocidad vale cero (y el objeto no se mueve), así que la primera ley también afirma que un objeto en reposo se mantendrá así, mientras no incida sobre él una fuerza neta diferente de cero.

Segunda ley: Fuerza, masa y aceleración

Una fuerza neta que actúe sobre un objeto le producirá una aceleración proporcional a la magnitud de la fuerza, y en la misma dirección. Además, esta aceleración será inversamente proporcional a la masa del objeto.

La segunda ley suele resumirse en la expresión

$$F = ma$$

en la que F es la fuerza neta que incide sobre el objeto, cuya masa es m y sufre como consecuencia una aceleración a.

Tercera ley: acción y reacción

Siempre que un cuerpo ejerce una fuerza neta sobre un segundo cuerpo, el segundo cuerpo ejercerá sobre el primero una fuerza igual y en sentido opuesto.

La primera fuerza suele llamarse “acción”, mientras que la segunda suele denominarse “reacción”: si empujas una pared (ejerces una fuerza de acción sobre la pared), sentirás cómo la pared te empuja a ti con una fuerza igual y en sentido contrario a la tuya (la pared ejerce sobre ti una fuerza de reacción).

A este respecto, es muy importante que tengas claro un punto: las fuerzas de acción y reacción actúan siempre sobre objetos diferentes. Para entenderlo analiza la siguiente situación:

Al estar el libro descansando sobre la mesa, ejerce sobre ella una fuerza de contacto. Esta fuerza de contacto es igual en magnitud al peso del libro, pero no actúa sobre él sino sobre la mesa: es una “acción”, a la cual la mesa responde con una “reacción”, la fuerza normal de la mesa sobre el libro. Observa la siguiente figura:

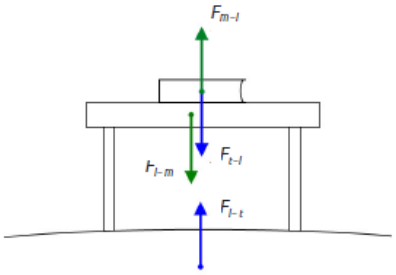


Figura 3.5 Las fuerzas representadas de color verde forman un par acción-reacción; las representadas de color azul forman otro par. La fuerza F_{m-l} es la que ejerce la mesa sobre el libro y es la reacción a F_{l-m}, que es la fuerza que el libro ejerce sobre la mesa. Por su parte, F_{t-l} es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre el libro (su peso) mientras F_{l-t} es la reacción del libro, que también atrae a la Tierra. ¿Hay más pares acción-reacción que no se hayan incluido en esta figura? ¿Por qué ni la mesa, ni el libro, ni la Tierra experimentan aceleración?

Por otro lado, cuando tú empujas el libro, la reacción a tu empuje no es la fricción (de nuevo, ambas actúan sobre el mismo objeto). La reacción a tu empuje es la fuerza que el libro ejerce sobre tu mano, y que tú sientes como el “contacto” del libro sobre tu piel.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 14 sobre las **leyes de Newton** de la página 164 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Vectores y las leyes de Newton

Revisa más de este tema en:

Vectores es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 8** página 153 y **Módulo 16** página 165.

Las leyes del movimiento que acabamos de introducir permiten analizar una gran variedad de situaciones que involucren la acción de fuerzas. Revisa la siguiente situación:

Jorge, Fabiola y Quetzal son tres amigos que juegan un curioso juego, que consiste en amarrar tres cuerdas a un aro de metal de 1.5 kg, y jalar el aro los tres al mismo tiempo, cada quien en una dirección determinada.

En un momento del juego, los tres amigos están colocados como en la figura:

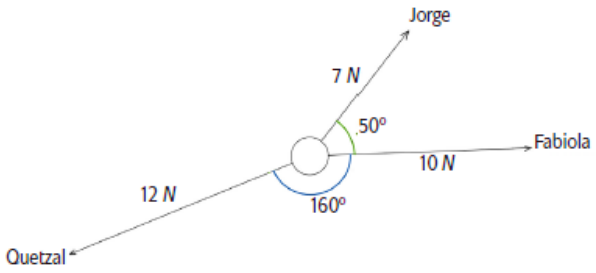


Figura 3.6 Representación de los tres amigos tirando del aro de metal, cada uno en una dirección distinta. La longitud de cada flecha indica la magnitud de la fuerza con la que esa persona está jalando.

Es importante que recuerdes que una fuerza es un vector: tiene magnitud y tiene dirección. En la figura las flechas representan la fuerza con la que cada amigo jala el aro, la longitud de la flecha indica la magnitud de la fuerza mientras que la dirección de la fuerza queda indicada por el ángulo correspondiente.

De acuerdo con la primera ley de Newton, el aro se mantendrá en reposo a menos que actúe sobre él una fuerza neta distinta de cero. La fuerza neta, es la suma de todas las fuerzas que inciden sobre él.

De acuerdo con la segunda ley, el aro sufrirá una aceleración directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúe sobre él, y en la misma dirección que dicha fuerza neta.

Entonces, lo primero que necesitamos es calcular la fuerza neta que actúa sobre el aro: eso significa que necesitamos aprender a sumar vectores.

Suma de vectores por el método del paralelogramo

Antes de continuar, nota que usaremos letra en negrita cuando nos estemos refiriendo a un vector, para distinguirlo de las magnitudes escalares.

Existen varios métodos que permiten realizar esa clase de sumas. Uno de ellos es el ***método del paralelogramo***.

Conviene mencionar que cuando dos o más vectores inciden en el mismo punto, como los que se observan en la figura 3.7, se les suele llamar *vectores concurrentes* (pues concurren en un mismo punto) o también *vectores angulares* (pues al concurrir, forman ángulos entre ellos). Por otro lado, dos vectores que están dirigidos en la misma dirección se llaman *vectores colineales*. Observa las figuras 3.8a y 3.8b:

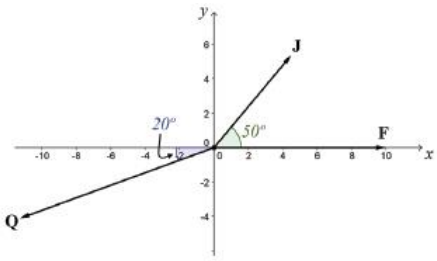


Figura 3.7 Una versión abstracta del juego de los tres amigos. Se incluye un sistema de referencia, cuyo eje positivo x coincide con la dirección de la fuerza **F**, correspondiente a Fabiola, y cuyo origen está colocado en la posición del aro, que además se representa por un punto. ¿Por qué el ángulo azul mide 20°? (Sugerencia: observa con cuidado la figura 3.6.)

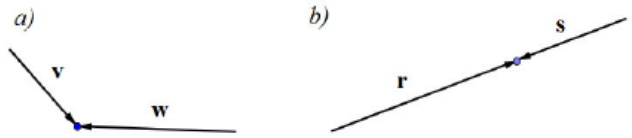


Figura 3.8 *a*) **v** y **w** son dos vectores concurrentes, o angulares. *b*) **r** y **s** son dos vectores colineales.

Volvamos ahora a la suma de los vectores J, F y Q. Como veremos en un momento, el método del paralelogramo sirve para sumar sólo dos vectores, y aquí tenemos tres. Pero eso no es ningún problema: podemos usarlo para sumar primero dos de ellos, y luego para sumar el resultado con el tercer vector.

La idea en este método de suma de vectores es "tomar" al primero de ellos, y trasladarlo desde su posición en el origen de coordenadas hasta la "punta" del segundo vector. Mira la figura 3.9.

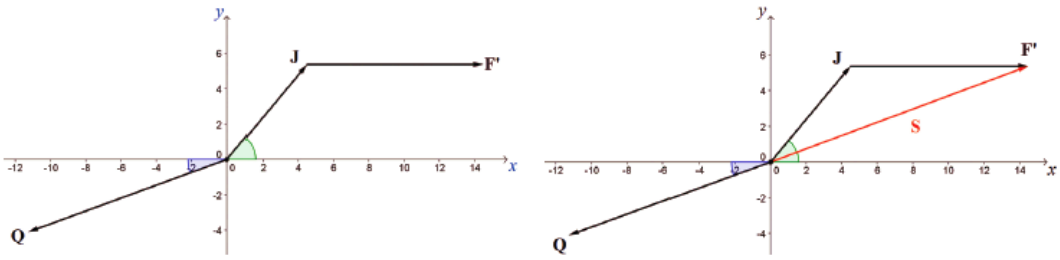


Figura 3.9 Método del paralelogramo para sumar vectores. En la figura 3.4a El vector **F** ha sido trasladado desde su posición en el origen de coordenadas hasta la punta del vector **J**; esta versión trasladada se denota por **F'**. Por otra parte, en 3.4b, la suma de los vectores **F** y **J** se obtiene trazando un nuevo vector, desde el origen de coordenadas hasta la punta del vector trasladado **F'**. En la figura se ha llamado **S** a este vector resultante.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 15 sobre **vectores** de la página 168 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Sólo falta sumar este vector resultante S con el vector Q, que representa la fuerza con la que jala Quetzal. Observa la figura 3.10, que muestra la forma de realizar esta suma empleando de nuevo el método del paralelogramo:

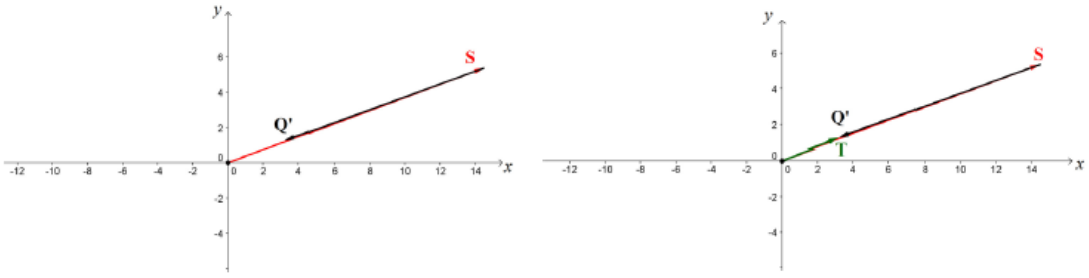


Figura 3.10 La suma del vector resultante **S** con el vector **Q**. En a) el vector **Q** ha sido trasladado desde su posición en el origen de coordenadas hasta la punta del vector **S**; esta versión trasladada se denota por **Q'**; nota cómo **S** y **Q'** quedan prácticamente "encimados". Por otra parte en b) La suma de los vectores **Q** y **S** se obtiene trazando un nuevo vector, desde el origen de coordenadas hasta la punta del vector trasladado **Q'**. En la figura se ha llamado **T** a este vector resultante total.

De este modo la fuerza neta que actúa sobre el aro queda representada por el vector T, que es resultado de la suma de los tres vectores J, F y Q.

Observa que T apunta en dirección contraria a la fuerza que ejercía Quetzal; eso significa que aunque él jalaba con una fuerza mayor, Jorge y Fabiola —que jalaban con menos fuerza pero en direcciones tales que se ayudaban entre sí— terminan ganándole, y el aro se moverá hacia donde están ellos dos.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 16 sobre **magnitud, dirección y aceleración** de la página 169 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

El método del paralelogramo tiene la ventaja de ser relativamente sencillo de emplear, pero a cambio tiene un par de desventajas que probablemente hayas notado al realizar tus dibujos: sólo puedes emplearlo para sumar dos vectores a la vez, y puede ser poco preciso.

Suma de vectores empleando componentes axiales

Observa la siguiente figura:

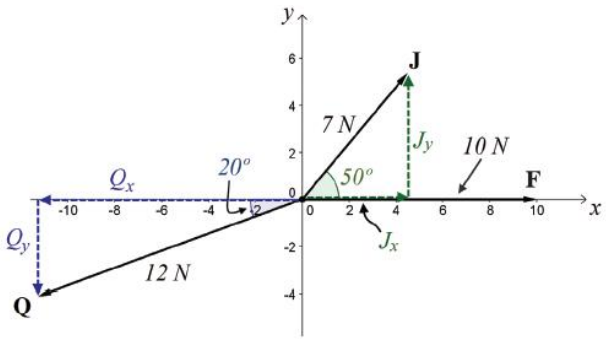


Figura 3.11 Los tres vectores que representan las fuerzas con las que jalan los tres amigos. Se han incluido en el dibujo las componentes axiales (ver sección *Vectores y una breve introducción a la Trigonometría*) de **J** y **Q**. ¿Por qué **F** no parece tener componentes axiales?)

La idea en el método de suma por componentes axiales es la siguiente: en lugar de sumar directamente los vectores, descomponerlos en sus componentes axiales y luego sumar estos componentes: los verticales con los verticales y los horizontales con los horizontales.

El resultado serán los componentes horizontal y vertical del vector resultante total, con los cuales será posible determinar su magnitud y su dirección.

Las componentes axiales de:

$$J_x = 7\cos 50°$$
$$J_y = 7\,\text{sen}\,50°$$

Mientras que los de Q son:

$$Q_x = 12\cos 20°$$
$$Q_y = 12\,\text{sen}\,20°$$

Gracias a la forma en que decidimos colocar nuestro sistema de referencia, F no tiene componente en la dirección y (lo cual también puede interpretarse diciendo que esa componente vale cero, $F_y = 0$), mientras que su componente en la dirección x coincide con su propia magnitud; en otras palabras,

$$F_x = 10$$
$$F_y = 0$$

Ahora, sumamos todas las componentes horizontales para obtener la "componente horizontal resultante" T_x:

$$T_x = J_x - Q_x + F_x = 7\cos 50° - 12\cos 20° + 10 = 3.22$$

Nota que la componente Q_x se restó en lugar de sumarse. Observa en la figura anterior que tanto J_x como F_x apuntan en la dirección horizontal positiva del sistema de referencia (es decir, a la derecha), mientras que Q_x lo hace en la dirección horizontal negativa (a la izquierda). Para tomar eso en cuenta, es necesario considerar a Q_x como una cantidad negativa, por lo que al efectuar la suma, Q_x termina restándose a las otras componentes.

Ahora procedemos de manera análoga con las componentes verticales:

$$T_y = J_y - Q_y + F_y = 7\,\text{sen}\,50° - 12\,\text{sen}\,20° + 0 = 1.26$$

Nuevamente, J_y y F_y apuntan en la dirección vertical positiva (hacia arriba) por lo que se les toma como positivos, mientras que Q_y apunta en la dirección vertical negativa (hacia abajo), y por ello debe restarse en lugar de sumarse con las demás componentes. Acabamos de obtener las componentes del vector resultante total; mira la figura siguiente:

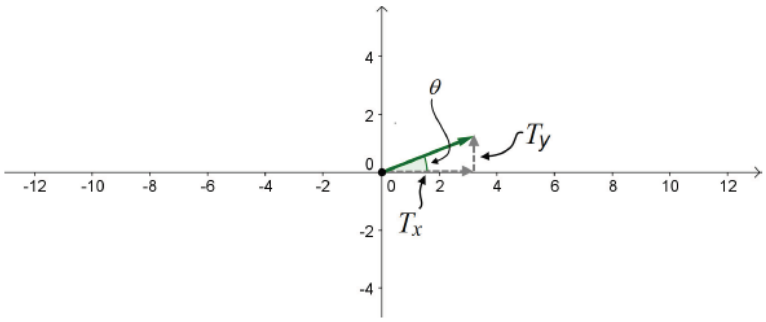


Figura 3.12 El vector resultante total **T** con sus componentes axiales T_x y T_y.

Conociendo los valores de estas componentes, podemos calcular la magnitud de T mediante el teorema de Pitágoras:

$$T = \sqrt{(3.22)^2 + (1.26)^2} = 3.46$$

Por otro lado, el ángulo de dirección θ se puede deducir a partir de:

$$\tan\theta = \frac{1.26}{3.22}$$

Esta ecuación permite despejar al ángulo θ; para ello, es necesario transponer la razón tangente del miembro izquierdo al derecho, empleando lo que se conoce como su "razón inversa". La razón inversa de la tangente ($\tan^{-1}$) nos dará valor del ángulo cuya tangente vale $\frac{1.26}{3.22}$.

Así, al efectuar el despeje se tendrá:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1.26}{3.22}\right) = 21.367°$$

Así que mediante el método de componentes axiales hemos hallado la magnitud y la dirección del vector resultante T, que es la suma de las tres fuerzas que tiran del aro.

Suma de vectores empleando leyes de los senos y los cosenos

Otra posibilidad para realizar la suma de vectores es mediante el empleo de las llamadas leyes de los senos y los cosenos. Se trata de dos leyes que involucran, respectivamente, a los senos y los cosenos de los ángulos de un triángulo cualquiera; para ilustrar ambas leyes, considera el triángulo de la siguiente figura:

Revisa más de este tema en:
Teorema de Pitágoras es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas y Módulo 8** página 156.

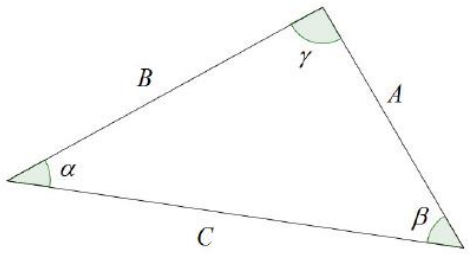


Figura 3.13 La ley de los senos es válida para cualquier triángulo, al igual que la ley de los cosenos.

La ley de los senos establece que, en cualquier triángulo,

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{B}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{C}{\operatorname{sen}\gamma}$$

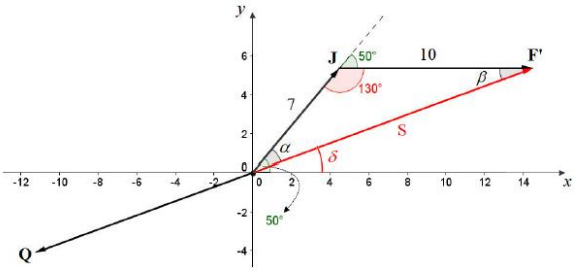
Es decir, el cociente "longitud de un lado" / "seno del ángulo opuesto" se mantiene constante para los tres lados y los tres ángulos del triángulo.

Por su parte, la ley de los cosenos afirma que, en cualquier triángulo,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$

Es decir, uno de los lados (en este caso se eligió a C, pero pudo haberse elegido a cualquier otro) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de esos dos, por el coseno del ángulo que forman.

Para ilustrar el uso de estas leyes en la suma de vectores, la suma de F más J empleando dichas leyes. Cuando esa suma se realizó mediante el método del paralelogramo, el vector F se trasladó hacia la punta del J. La suma de ambos, S, formaba un triángulo con ellos, como se muestra en la figura:

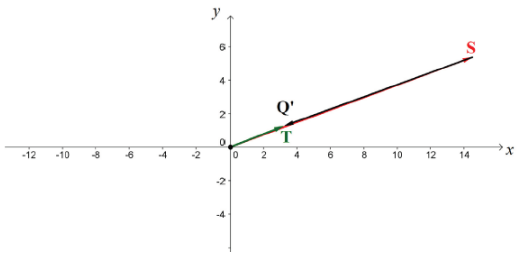


Nos concentraremos momentáneamente en el triángulo que se forma con F, J y S. Las magnitudes de F y J son conocidas y se muestran en la figura, al igual que el ángulo que forman entre ellos (130°). Pues bien, como las leyes de los senos y los cosenos se pueden aplicar a cualquier triángulo, podemos aplicarlas a este; la ley de los senos quedaría:

$$\frac{10}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{7}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{S}{\operatorname{sen}130°}$$

La ley de los cosenos (escribiéndola para el lado S) se convertiría en:

$$S^2 = 7^2 + 10^2 - 2(7)(10)\cos 130°$$
$$S^2 = 49 + 100 - 140\cos 130°$$
$$S^2 = 238.99$$
$$S = \sqrt{238.99}$$
$$S = 15.46$$



Lo cual significa que la magnitud del vector S, resultado de la suma de J más F, es $S = 15.46$. Para calcular su ángulo de dirección δ debemos usar la *ley de los senos* para calcular el ángulo α que S forma con J; sustituimos el valor de S en dicha ley, y tendremos:

$$\frac{10}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{7}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{15.46}{\operatorname{sen}130°}$$

Nos quedamos con el primer y el último cociente (por el momento no nos interesa obtener el valor de β, y llegamos a:

$$\frac{10}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{15.46}{\operatorname{sen}130°}$$

Ahora despejamos el ángulo α como sigue:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{10(\operatorname{sen}130°)}{15.46}$$
$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{10(\operatorname{sen}130°)}{15.46}\right]$$
$$\alpha = 29.70°$$

Recuerda que una razón trigonométrica se puede transponer de un miembro al otro de una ecuación empleando su razón inversa; en este caso, se ha usado la razón seno inverso, que se escribe sen^{-1}.

Verás que el ángulo que buscamos, δ, se puede obtener como la diferencia entre los 50° de dirección del vector J y los 29.70° que acabamos de calcular para α. Es decir,

$$\delta = 50° - 29.70° = 20.30°$$

Así que hemos hallado tanto la magnitud como la dirección del vector S; en otras palabras, hemos efectuado la suma $J + F$. Para finalizar el problema, el paso siguiente era llevar a cabo la suma $S + Q$; por el método del paralelogramo, ello requiere que el vector Q se traslade hasta la punta del S, como en la siguiente figura:

El vector T es el resultado de esa suma, y su magnitud y dirección podrían calcularse empleando de nueva cuenta las leyes de los senos y los cosenos; sin embargo, en este caso no es lo recomendable, pues como puedes apreciar, los vectores S y Q son

prácticamente colineales, por lo que el "triángulo" que se forma con S, Q y T más bien tiene el aspecto de una línea recta. Entonces conviene calcular T empleando alguno de los otros dos métodos explorados con anterioridad.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 19 sobre magnitud, dirección y aceleración de la página 175 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Newton en acción

Ejemplo:

Supón que la fuerza que ejerce Manuel fuera de 5 N, que el ángulo con el que la aplica fuera de 40° y que el remolque tuviera una masa de 4 kg. Calcular la fuerza.

Solución:

Al descomponer la fuerza en sus componentes axiales, tendríamos que éstas son

$$F_x = 5\cos 40° \quad F_y = 5\operatorname{sen} 40°$$

Si no hay fricción, el remolque acelera únicamente a causa de la componente F_x de la fuerza con la que jala Manuel (mientras no lo levante, el remolque sólo se moverá en la dirección horizontal y en ausencia de fricción, sólo F_x actúa en esa dirección). La segunda ley de Newton nos dice que entonces su aceleración será de $\frac{5\cos 40°}{4} = 0.96 \, m/s^2$.

Por otra parte, para levantar el remolque Manuel tendría que jalar con una fuerza tal, que su componente vertical superara al peso del aparato; este peso de $9.81(4) = 39.24N$ Llamemos F a la magnitud de esta fuerza desconocida. Entonces podemos escribir

$$F \operatorname{sen} 40° = 39.24$$

de donde obtenemos rápidamente: $F = \frac{39.24}{\operatorname{sen} 40°} = 61.05N$

En cuanto la fuerza de Manuel superara ese valor, levantaría al remolque del suelo.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 20, 21 y 22 sobre **leyes de Newton** de la página 175 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Trabajo

El trabajo (abreviado W, por la palabra inglesa "work", trabajo) que efectúa una fuerza F al desplazar un objeto a lo largo de una distancia d , se calcula mediante la expresión:

$$W = F \cdot d$$

Hay que recordar que el desplazamiento debe ocurrir en la dirección en que es aplicada la fuerza.

Potencia mecánica

Se define como la cantidad de trabajo realizado por unidad de tiempo. Es decir, la potencia P desarrollada por realizar un trabajo W en un tiempo t es: $P = \frac{W}{t}$

Sus unidades en el SI son los watts (su abreviatura es la letra W; 1 W equivale a 1 J/s).

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 23 sobre **Trabajo** de la página 181 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Ejemplo:

Caminando a paso normal, puedo subir las escaleras que llevan al primer piso de mi edificio en 5 segundos. El primer piso se encuentra a 2.5 m del suelo, y tengo una masa de 62 kg. Determina la potencia que eres capaz de desarrollar al subir las escaleras.

Solución:

Para subir las escaleras, mis piernas deben ejercer una fuerza hacia arriba igual a mi peso, el cual vale:

$$F = (9.81)(62) = 608.22N$$

Al llegar al primer piso, he ejercido esa fuerza a lo largo de 2.5 m de distancia. Entonces el trabajo que realizo es de:

$$W = (608.22N)(2.5m) = 1520.55N \cdot m$$

Si me toma 5 segundos realizarlo, la potencia que desarrollan mis piernas es de

$$P = \frac{1520.55}{5} = 304.11\text{W}$$

Observa cómo al dividir una cantidad expresada en joules (J) entre otra expresada en segundos (s), el cociente es una cantidad cuyas unidades son J/s, es decir, watts (W).

Energía

En Física, se entiende por **energía** la capacidad que tiene un objeto para realizar trabajo.

La palabra “energía” aparece últimamente en contextos muy diversos. Existen diversos tipos de energía: la ***energía eléctrica*** (como la que permite que el motor de un ventilador realice trabajo al mover las aspas), la ***energía química*** (como la almacenada en la gasolina,

que al quemarse hace que el motor de un automóvil realice trabajo poniendo el auto en movimiento), la ***energía nuclear*** (como la de las centrales nucleoeléctricas, que mediante la fisión del átomo generan calor, que evapora el agua de un tanque, vapor que realiza trabajo al mover una turbina, la cual genera electricidad).

A nosotros en este momento nos interesa la llamada **energía mecánica**, la cual es la energía que un objeto adquiere como resultado de su velocidad o de su posición; como es el caso de la ***energía cinética y energía potencial.***



Revisa más de este tema en:
Energía Cinética y Potencial es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 8** página 39, **Módulo 9** página 87 y **Módulo 21** página 160.

Energía cinética

Un objeto que se mueve puede realizar trabajo si lleva la suficiente velocidad, lo que significa que le aplica una fuerza a lo largo de una distancia determinada.

Esto significa dos cosas:

- Un objeto en movimiento tiene la capacidad de realizar trabajo.
- Un objeto en movimiento tiene energía mecánica, por el sólo hecho de encontrarse en movimiento.

Esta clase de energía mecánica que poseen los objetos en movimiento se conoce como ***energía cinética*** (del griego kinesis, "movimiento"). La energía cinética k de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad v se expresa mediante la fórmula:

$$k = \frac{1}{2}mv^2$$

Energía cinética de un objeto de masa m, que se mueve a una velocidad v

Las unidades del SI que se emplean para medir energía mecánica (y por lo tanto energía cinética) son los joules (J). Si en la fórmula anterior la masa se da en kilogramos y la velocidad en metros/segundo, la energía cinética quedará expresada en joules.

Ejemplo:

¿qué energía cinética alcanza una persona que pesa 60 kg al llegar al suelo después de una caída de 3 m?

Solución:

Para averiguarlo, necesitamos saber con qué velocidad se llega al suelo luego de una caída como esa. Puesto que la velocidad de un objeto que cae va aumentando con el tiempo debido a la aceleración de la gravedad, hace falta obtener primero el tiempo que dura dicha caída.

Continuación…

Ignorando la fricción del aire, la ecuación que describe la caída libre de un objeto desde una altura inicial de 3 m, con una velocidad inicial cero, es:

$$d = -\frac{1}{2}(9.81)t^2 + 3$$

Hemos tomado negativa la dirección en la que actúa la gravedad, hacia abajo. En esta ecuación, representa la posición (la altura) del objeto que cae, después de t segundos de caída. Al llegar al suelo, esta altura vale cero, así que tenemos: $0 = -\frac{1}{2}(9.81)t^2 + 3$

Un rápido despeje nos lleva a: $t = \sqrt{\frac{3(2)}{9.81}} = 0.78$ s

Lo cual significa que toma 0.78 segundos llegar al suelo al caer desde 3 m de altura. En otras palabras, la aceleración de la gravedad actuará durante esos 0.78 segundos. Recordando que la velocidad inicial es cero, la definición de aceleración permite escribir entonces: $9.81 = \frac{v_f - 0}{0.78}$

Al despejar la velocidad final tendremos: $v_f = 9.81(0.78) = 7.65\ {}^{m}\!/_{s}$

Es decir, al caer desde una altura de 3 m con una velocidad inicial cero, se llega al suelo con una velocidad de 7.65 m/s. La energía cinética de una persona que pesa 60 kg al alcanzar esta velocidad será de: $\frac{1}{2}(60)(7.65)^2 = 1755.67$ J

Energía potencial

Un objeto que se mueve puede hacer trabajo, y por lo tanto tiene energía, se denomina energía cinética. Pero un objeto en reposo también puede tener la capacidad de hacer trabajo, si las condiciones son apropiadas.

Esta clase de energía, que está "almacenada" en un objeto como resultado de su posición y lista para convertirse en energía cinética, se llama **energía potencial** (pues tiene el "potencial" de hacer trabajo).

La **energía potencial** de un objeto es la energía mecánica asociada a su posición o configuración. Es la energía almacenada en el objeto debido a su posición y que se puede transformar en energía cinética o trabajo.

La energía potencial es debida a la presencia de la atracción gravitacional de la Tierra, así que también se le denomina ***energía potencial gravitacional***.

Podemos obtener una expresión para la energía potencial gravitacional si consideramos que el trabajo que debe efectuarse sobre un objeto para llevarlo hasta una altura h es:

$$W = F \cdot h$$

Si el objeto tiene una masa m, la fuerza necesaria para levantarlo del suelo es igual a su peso, mg (donde g es la aceleración de la gravedad), de modo que el trabajo anterior se puede escribir

$$W = mgh$$

Como la energía potencial es igual a este trabajo efectuado para llevar el objeto hasta la altura h, se puede escribir alternativamente

$$U = mgh$$

Energía potencial de un objeto de masa m colocado a una altura h

en donde U representa a la energía potencial gravitacional.

Es importante que tomes en cuenta que la altura h se mide respecto a un cierto nivel de referencia: en el caso de la pelota, este nivel de referencia es el suelo, pero también podría ser el quinto piso de un edificio (como sería el caso si tú y la pelota se encontraran en ese piso). Esto significa que la energía potencial, como la energía cinética, es relativa al sistema de referencia desde el cual se realicen las observaciones.

Ejemplo:

Un elevador vacío tiene una masa de 700 kg. Está instalado en un edificio en el que cada piso tiene 3 m de alto, si el elevador va del primer piso al tercero. Calcula el incremento que sufre su energía potencial.

Solución:

Su energía potencial inicial (respecto al suelo, encontrándose en el primer piso) es de:

$$700(9.81)(3) = 20601 \text{ J}$$

Su energía potencial final, al llegar al tercer piso (a 9 m de altura sobre el suelo) será de:

$$700(9.81)(9) = 61803 \text{ J}$$

Entonces su energía potencial experimenta un incremento de: $61803 - 20601 = 41202$ J

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 27 sobre **energía potencial** de la página 188 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Todo se va a alguna parte: trabajo y conservación de la energía

"La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma". Se trata de una forma de expresar una importante ley física, la conservación de la energía. Básicamente, la idea principal está contenida en dicha frase: la energía nunca "desaparece", ni tampoco "aparece" energía de la nada; todo lo que ocurre son transformaciones de una clase de energía en otra.

En el caso de la energía mecánica, la energía potencial de un objeto que se encuentra en una posición elevada se puede transformar en energía cinética (cuando el objeto se deja caer y comienza a moverse). Cuando llega al suelo, su energía cinética será igual a la energía potencial que tenía cuando estaba en la posición elevada: no se pierde ni se gana energía en ningún momento.

Se ha definido a la energía como la capacidad de un objeto para hacer trabajo. La relación entre ambas cantidades va más allá:

En el caso de la ***energía potencial*** es igual al trabajo efectuado para llevar un objeto hasta una altura h respecto al suelo.

En el caso de la ***energía cinética*** ocurre algo similar: cuando se efectúa trabajo sobre un objeto, se le aplica una fuerza a lo largo de una distancia determinada. De acuerdo con la segunda ley de Newton, eso implica que el objeto sufre una aceleración, un cambio en su velocidad. Pero a su vez, eso significa que hay un cambio en su energía cinética; este cambio en la energía es igual al trabajo efectuado sobre el objeto.

Lo expresamos escribiendo: $W = \Delta k$

donde W es el trabajo realizado sobre un objeto, y Δk representa el cambio en su energía cinética (la letra griega delta mayúscula, " Δ ", suele emplearse para representar cambio).

El hecho de que el trabajo efectuado sobre un cuerpo sea igual al cambio en su energía cinética (y viceversa) constituye otra importante ley física, conocida como el teorema trabajo-energía.

Teorema trabajo-energía

El trabajo efectuado sobre un cuerpo es igual al cambio en su energía cinética, y viceversa.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 28 sobre **energía cinética** de la página 191 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en el Apéndice 1.

Ejemplo:

Imagina un objeto cuya masa sea de 100 kg, el cual es llevado a 25 m de altura. Encontrar el trabajo neto W a lo largo de los 25 m.

Solución:

Su *energía potencial* en esa posición es de $U = 100(9.81)(25) = 24\,525\ J$.

Si se le deja caer, al llegar al suelo su energía potencial será cero, pero no habrá desaparecido: en realidad, se habrá transformado por completo en *energía cinética*.

Eso quiere decir que justo antes de tocar el suelo, su energía cinética será también de $24\,525\ J$, lo que permite escribir:

$$\frac{1}{2}mv^2 = 24525$$

donde m es la masa del objeto y v su velocidad en el instante antes de tocar el suelo. Como conocemos su masa, podemos despejar dicha velocidad:

$$\frac{1}{2}(100)v^2 = 24525$$

$$v = \sqrt{\frac{2(24525)}{100}} = 22.15\ \frac{m}{s}$$

Imaginemos ahora que el mismo objeto comienza su caída con una velocidad inicial de $10\ \frac{m}{s}$ (quizás porque recibe un empujón hacia abajo al empezar a caer). Al mismo tiempo, un agente externo comienza a ejercer sobre él una fuerza hacia arriba, la cual lo va frenando a lo largo de todo el trayecto, de modo que, al llegar al suelo, su velocidad es exactamente cero. Gracias al teorema trabajo-energía podemos calcular la magnitud de esta fuerza.

Dicho teorema establece que el trabajo realizado sobre un objeto es igual al cambio en su energía cinética. En este caso, hay que tomar en cuenta que sobre el objeto actúan dos fuerzas: su peso, que lo jala hacia abajo por efecto de la aceleración de la gravedad, y la fuerza con la que el agente externo va frenando su caída. El trabajo neto realizado sobre el objeto será la suma de los trabajos efectuados por cada una de estas fuerzas.

Llamemos W_F al trabajo efectuado por la fuerza de frenado, y W_g al realizado por el peso del objeto. Entonces el trabajo neto W a lo largo de los 25 m de caída será

$$W = W_g - W_F = 100(9.81)(25) - 25F = 24525 - 25F$$

Continuación…

Hay que recordar que W_F se opone al movimiento de caída del objeto, y por lo tanto es negativo. Además, hemos llamado F a la fuerza de frenado. Ahora bien, este trabajo neto será igual al cambio en la energía cinética del objeto. Como la caída comenzó con una velocidad de 10 m/s, la energía cinética inicial era de:

$$\frac{1}{2}(100)(10)^2 = 5000 \text{ J}$$

Como queremos que el objeto llegue al suelo con velocidad cero, su energía cinética final deberá ser también cero. Entonces, el cambio en la energía cinética es simplemente de $-5\ 000\ J$ (negativo, pues será una disminución de energía cinética). Por el teorema trabajo-energía, escribimos entonces: $24\ 525 - 25F = -5\ 000$

de donde resulta: $$F = \frac{-24525 - 5000}{25} = 1181 \text{ N}$$

Así que la fuerza necesaria para que el objeto llegue al suelo con una velocidad de exactamente cero metros sobre segundo, es 1181 N

#Entrénate

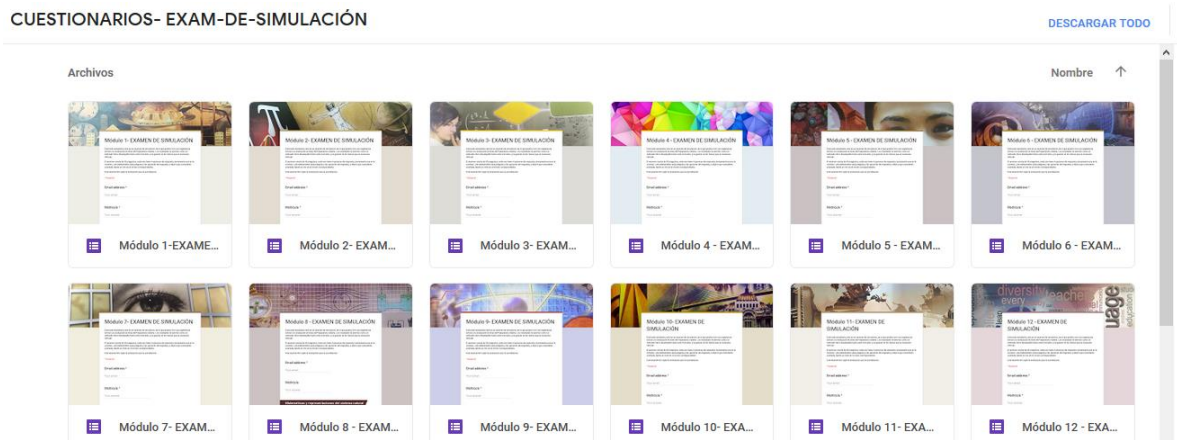
Hemos llegado al final de este módulo, ahora te toca revisar que tan preparado estás para el examen de acreditación.
Como pudiste observar en el Curso propedéutico de Comunicación, el examen para acreditar tu modulo tiene retos importantes en cuanto al manejo de Tecnologías de Información y Comunicación y el seguimiento de instrucciones.

Antes de realizar el examen real, entrénate con la evaluación **¿Ya estoy preparado(a)?** que se encuentra en la sección final del libro, donde al terminar podrás verificar tus respuestas en el **Apéndice 1**. También prepárate con nuestro **simulador de examen**, el cual te servirá como un indicador de tu desempeño y te guiará en los temas necesarios a reforzar, para ello sigue las siguientes indicaciones:

1. Ingresa a nuestra página de internet www.seg.guanajuato.gob.mx/prepaabierta.



2. Elige el examen de simulación correspondiente a este módulo.



3. Escribe tus datos de identificación: Nombre, matrícula, ¿Dónde estudio? en su caso grupo de estudio, Centro de Asesoría al que perteneces, o si eres estudiante independiente.

4. Comienza a contestar las preguntas, toma en cuenta los siguientes criterios:

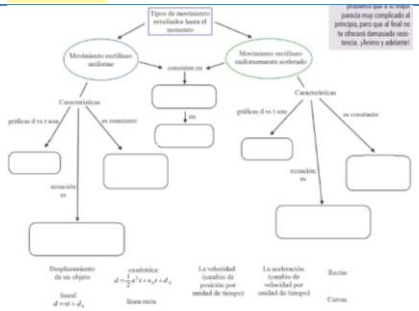
4.1. Lee con detenimiento cada una de las preguntas, sigue la guía ¿cómo son los exámenes? Que aparece en el Curso propedéutico de comunicación.

4.2 No dejes ninguna pregunta sin contestar

4.3. No hay límite de oportunidades para contestar el examen

5. Según tus resultados úbica los temas que necesitas revisar nuevamente antes de realizar el examen de acreditación.

ANEXO 1. CORRECCIÓN DE EDICIÓN DE LIBROS

Referencia		Dice	Debe decir
Página	**Número/ inciso**		
50	Ejemplo	$d = -20t - 50$ $10 = -20t - 50$	$d = -20t + 50$ $10 = -20t + 50$
56		• Simplifica todo lo posible. Debes llegar a $d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$	$d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$
57	Actividad 25	$d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$ Ec. del movimiento uniformemente acelerado	$d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$
57	Actividad 26	$d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$	$d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$
57		La ecuación de movimiento uniformemente acelerado es: $d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$	La ecuación de movimiento uniformemente acelerado es: $d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$
58	Ejemplo	$2x^2 - 8 = 0 + 8$ $2x^2 - 8$	$2x^2 - 8 + 8 = 0 + 8$ $2x^2 = 8$
59	Mapa conceptual		Nota: La respuesta no viene en el apéndice
59	Cuadro	cuadrática: $d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$ línea recta	$d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$
62	Actividad 29 paso VI	$d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$	$d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$
62	Actividad 30	$d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$	$d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$
63		$d = \frac{1}{2} a^2 t + v_0 t + d_0$	$d = \frac{1}{2} at^2 + v_o t + d_o$

68	Tema: Graficando manualmente	$d = -4.9t_2 + 20t + 1$	$d = -4.9t^2 + 20t + 1$
73	Tema: Algunas técnicas especiales	$d = \frac{1}{2}a^2t + v_0t + d_0$	$d = \frac{1}{2}at^2 + v_ot + d_o$
85		$d_y = 1 - \frac{(25 \text{ sen } 30^\circ)^2}{4(-4.90)} = 8.97$	$d_{y=}$ 0 - $\frac{(25 \text{ sen } 30^\circ)^2}{4(-4.90)}$ =7.97

Fuentes consultadas

Cruz, D. (2012). Dinámica en la naturaleza: el movimiento. México: SEP

seg.guanajuato.gob.mx

GTO
Grandeza de México

Secretaría
de Educación

PREPARATORIA ABIERTA
GUANAJUATO

