seg.guanajuato.gob.mx

GTO Grandeza de México

Secretaría de Educación

Cálculo en fenómenos naturales y procesos sociales

Guía de Estudio

PREPARATORIA ABIERTA GUANAJUATO



Este material es propiedad de la Secretaría de Educación de Guanajuato y están protegidos por la LEY FEDERAL DEL DERECHO DE AUTOR bajo el Registro 03-2017-070611482200-01 y demás disposiciones internacionales en la materia. Esta guía tiene como único propósito que los usuarios lo consulten con finalidades educativas. Los usuarios no están autorizados para transmitir ninguno de estos materiales por vía electrónica, o reproducirlos en forma alguna por ningún medio, electrónico, mecánico, sistemas de recuperación, grabación, impresión, fotocopiado, etc.

Secretaría de Educación de Guanajuato
Yoloxochitl Bustamante Diez

Subsecretaría para el Desarrollo Educativo
José Abel Arteaga Sánchez

Dirección General de Media Superior
Ximena María Alarcón Verduzco

Dirección de Preparatoria Abierta y a Distancia
Alejandro Carretero Carretero

Departamento Académico de la
Dirección de Preparatoria Abierta y a Distancia
Vania Ruth M. Castro Ortiz

Autoría
Yolanda del Pilar López Mejía

PRESENTACIÓN

Estimado estudiante, la Guía de estudio que vas a consultar a continuación es parte de una serie de materiales complementarios gratuitos que Preparatoria Abierta Guanajuato ha preparado para apoyarte en este proceso de estudiar el bachillerato no escolarizado, éstos no sustituyen a los libros de texto oficiales.

Las Guías de estudio para el Plan Modular, se han elaborado atendiendo los propósitos formativos definidos en los programas de estudio, teniendo como parte esencial una síntesis de la información contenida en los libros de texto, complementado con elementos de ubicación sobre la interrelación de las competencias y contenidos que abordarás en el Plan de estudios.

Para obtener el mayor provecho de estos textos es importante que identifiques cómo están organizados y comprendas los propósitos de cada uno de sus apartados.

Comienza por revisar el **Índice**, en él, puedes ubicar los temas que encontrarás en las guías de estudio, teniendo como referencia los libros de texto.

En la sección llamada **Punto de partida**, ubica los campos disciplinares que están en juego al estudiar los módulos, el nivel que ocupa en el mapa curricular (para saber más sobre el mapa curricular por niveles, revisa el Curso propedéutico de comunicación), y las horas estimadas de estudio por módulo. También encontrarás dos columnas que te indicarán hacia donde te diriges, cuál es el propósito de estudiar cada uno de los módulos y las competencias que deberás desarrollar para lograr dicho propósito.

Ubícate, es el apartado en el que puedes revisar el mapa curricular por niveles, te permite visualizar en dónde te encuentras y en la parte inferior puedes revisar la relación temática de éste de manera previa y posterior. De esta manera puedes programar los exámenes a presentar, ya sea siguiendo la secuencia progresiva por niveles o según la relación entre temas.

Antes de empezar, a abordar los temas de cada módulo, es necesario que realices las evaluaciones diagnósticas iniciales llamadas ¿Con qué saberes cuento?, que puedes revisar en el libro de texto digital o impreso o en la plataforma educativa mieva.mx.

Al inicio de cada unidad encontrarás tres preguntas, **¿Qué voy a aprender y cómo?,** ¿Con qué propósito? y ¿Qué saberes trabajaré?, las respuestas a estos cuestionamientos consolidarán la información que revisaste en las secciones anteriores. Revisa las preguntas completas en los libros de texto impresos o digitales.

Recuerda que esta Guía es una síntesis informativa de los libros de texto, por lo que encontrarás de manera enfática conceptos y actividades seleccionadas que te ayuden a lograr los indicadores de desempeño que están planteados en los libros con el ícono de tiro al centro. Además de otros elementos para ubicarte como los recuadros que te indican la relación temática entre módulos y las competencias transversales.

Finalmente **#Entrénate**, es una sección que te invita a realizar los exámenes diagnósticos finales, ¿ya estoy preparado?, que puedes revisar en los libros de texto o en la plataforma mieva.mx, y los exámenes de simulación en línea que Preparatoria Abierta Guanajuato ha desarrollado para que seas el gestor de tu propio aprendizaje.

ÍNDICE

Unidad 1. El movimiento como razon de cambio y la derivada 4

Movimiento, cambio y límite 5

La dependencia del movimiento en los fenómenos naturales y los procesos sociales 6

La caída libre de un proyectil, un excelente punto de partida 8

Método de los incrementos 10

Función, un concepto matemático imprescindible para comprender nuestro entorno 12

La función lineal 13

La función cuadrática en la variable x 15

Las funciones trigonométricas (principales y secundarias) 15

La función valor absoluto 18

La función escalonada 18

La función raíz cuadrada 18

La función exponencial y logaritmo natural 19

Construcción de la recta tangente a una curva, razón instantánea de cambio y la derivada de una función 20

Descripción de la pendiente de la recta tangente a una curva, la derivada 20

Relación entre continuidad y diferenciabilidad de una función 23

Reglas básicas de derivación y razones de cambio 26

Regla de la función constante 26

Regla de la función potencia 26

Regla del múltiplo constante de una función 27

Regla de la suma y diferencia de funciones 28

Derivadas de las funciones seno y coseno 28

Regla del producto de funciones 29

Regla del cociente de funciones 30

Derivadas de las funciones trigonométricas 31

Regla de la cadena o derivada de una función compuesta 31

Resumen de las principales reglas de derivación 32

Comportamiento de funciones, puntos críticos, máximos y mínimos 33

Problemas referentes al comportamiento de funciones y el uso de la derivada 33

Definición de conceptos referentes al comportamiento de funciones y uso de la derivada 33

Problemas de optimización y aplicaciones de la derivada 38

Unidad 2 La derivada en la explicación de fenómenos naturales y procesos sociales. 40
Dinámica poblacional, un fenómeno que incita al cálculo....41
Antiderivada e integral indefinida 42
Antiderivadas....42
Reglas básicas de integración 46
El área bajo la curva y el concepto de integral definida....48
Descubrimiento del número pi 48
El concepto de integral definida a partir del área bajo la curva 50
El teorema fundamental del cálculo (conexión de las operaciones inversas) 57
Integración por sustitución 60
Regla general de la potencia para la integración....63
Valor promedio y área comprendida entre dos curvas 68
Aplicaciones de la integración....69

ANEXO 1.CORRECCIONES DE EDICIÓN AL LIBRO 74
Fuentes consultadas 75

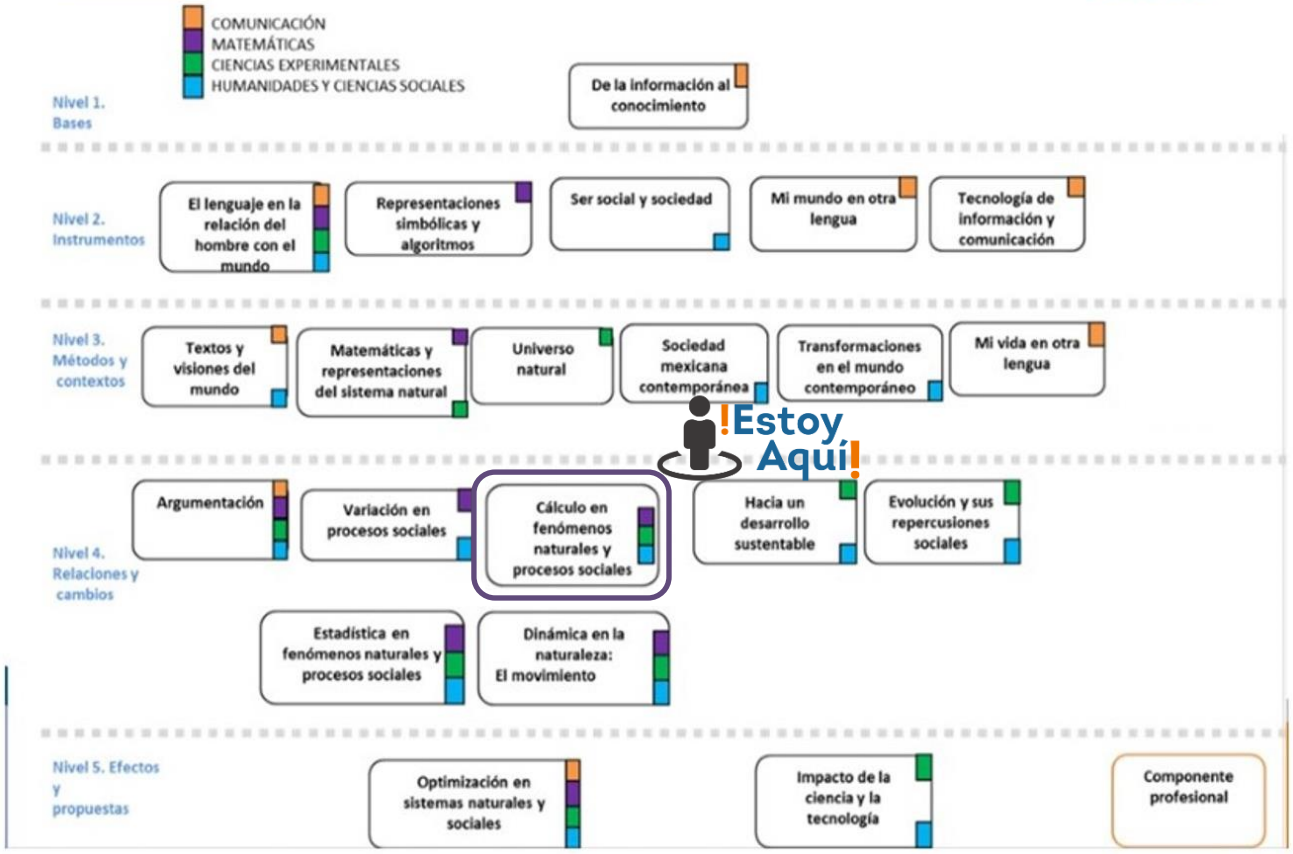
Campo(s) disciplinar(es): Matemáticas, Ciencias Experimentales, Humanidades y Ciencias Sociales Nivel: IV (Relaciones y cambios)	Módulo: Cálculo en fenómenos naturales y procesos sociales Horas estimadas de estudio: 60 horas
Propósito formativo **Este módulo tiene como propósito, que desarrolles competencias que te permitan:** Utilizar el cálculo infinitesimal de manera sistemática, con apoyo de teorías y modelos matemáticos como las funciones y la derivación, para el análisis, descripción y explicación de los comportamientos de los fenómenos naturales y procesos sociales propios del contexto cercano a la vida del estudiante.	**Competencias disciplinares básicas:** **Al finalizar el módulo deberás contar con las siguientes competencias:** Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de TICs. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. Establece la interrelación entre la ciencia, la tecnología, la sociedad y el ambiente en contextos históricos y sociales específicos. Identifica problemas, formula preguntas de carácter científico y plantea las hipótesis necesarias para responderlas. Relaciona las expresiones simbólicas de un fenómeno de la naturaleza y los rasgos observables a simple vista o mediante instrumentos o modelos científicos. Sitúa hechos históricos fundamentales que han tenido lugar en distintas épocas en México y el mundo con relación al presente. Argumenta sus ideas respecto a diversas corrientes filosóficas y fenómenos histórico-sociales, mediante procedimientos teórico-metodológicos. Establece la relación entre las dimensiones políticas, económicas, culturales y geográficas de un acontecimiento.

#Ubícate

Secretaría de Educación de Guanajuato

Prepa Abierta Guanajuato
Plan de Estudio Modular

PREPARATORIA ABIERTA GUANAJUATO



Previamente

Curso propedéutico de Matemáticas y Módulo 3

Este módulo tiene **mayor relación temática con**

Posteriormente

Principalmente con el módulo 20.

M15. Cálculo en fenómenos naturales y procesos sociales 2



Antes de empezar

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad, **¿Con qué saberes cuento?** que aparece en las págs. 17 a 20 del libro de texto correspondiente a este módulo, una vez que termines compara tus respuestas con las que aparecen en el apéndice del mismo libro en la pág.187.

¿Cuáles fueron tus resultados?

Qué tan sencillo te resultó resolver la evaluación diagnóstica ¿con qué saberes cuento?, si te sentiste como pez en el agua, estás listo para comenzar con el estudio de este módulo, recuerda estar monitoreando tu desempeño constantemente, basándote en las rúbricas de evaluación de las actividades y revisando el apéndice de las respuestas correctas que aparece al final de todos los libros de texto, ¡claro!, después de realizar por tí mismo los ejercicios.

Si al contrario, se te dificultó la resolución de este ejercicio de evaluación, será necesario que refresques algunos conocimientos y habilidades. Te recomendamos que revises el **curso propedéutico de matemáticas** y el libro del **módulo 3 Representaciones simbólicas y algoritmos** de Preparatoria Abierta Guanajuato, que podrás consultar y descargar de manera gratuita en nuestra página de internet, www.seg.guanajuato.gob.mx/prepaabierta. Además de revisar las ligas: http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/notas%20de%20clase/Precalculo.pdf y https://edumatth.weebly.com/pre-caacutelculo.html .

UNIDAD 1. EL MOVIMIENTO COMO RAZON DE CAMBIO Y LA DERIVADA

¿Qué voy a aprender y cómo?

Las matemáticas te proporcionan el lenguaje y los conceptos necesarios para estudiar y elaborar un modelo de nuestro entorno, el cual resulta necesario para expresar reglas generales de su comportamiento y para obtener predicciones de validez general. Lo anterior propicia el desarrollo científico y tecnológico y por ende la adquisición y consolidación tanto de conocimiento como del aprendizaje significativo.
El análisis crítico y objetivo de diversos fenómenos naturales y procesos sociales, mediante la aplicación del **método de análisis cuantitativo y cualitativo** propio de una rama de las matemáticas denominada **cálculo**, representa el objetivo a priori de este libro.
En todo momento requieres hacer uso de tus conocimientos previos para estudiar y tratar los cuatro problemas históricos que dieron origen al **cálculo matemático.** Cada uno de tales problemas comprende individualmente la noción del **límite**, por lo que es posible definir el cálculo matemático a partir de cualquiera de ellos. El primero de los problemas mencionados se muestra en la unidad inicial y hace referencia al concepto de **razón de cambio** a través del estudio y análisis de la **velocidad y aceleración** instantánea de un proyectil en caída libre. Su solución contribuyó al origen del concepto de **derivada de una función** y al denominado **cálculo diferencial**. La construcción de la **recta tangente** a una **curva** y la determinación de los **valores máximos y mínimos** en situaciones que demandan optimizar recursos representan el segundo y tercer problema que dieron origen al cálculo, por lo que su estudio tiene relación directa con la derivada como concepto fundamental y con la descripción del cálculo diferencial como herramienta de análisis de la naturaleza. Esta primera unidad, denominada El movimiento como razón de cambio y la derivada, se basa en el estudio y tratado de nuestro entorno a partir de los conceptos de **movimiento, cambio y límite**. El objetivo central del presente libro consiste en aplicar las habilidades matemáticas para obtener respuestas útiles a problemas reales (es decir, a problemas relacionados con los fenómenos naturales y los procesos sociales), llevándose a cabo a través de la construcción de modelos matemáticos.

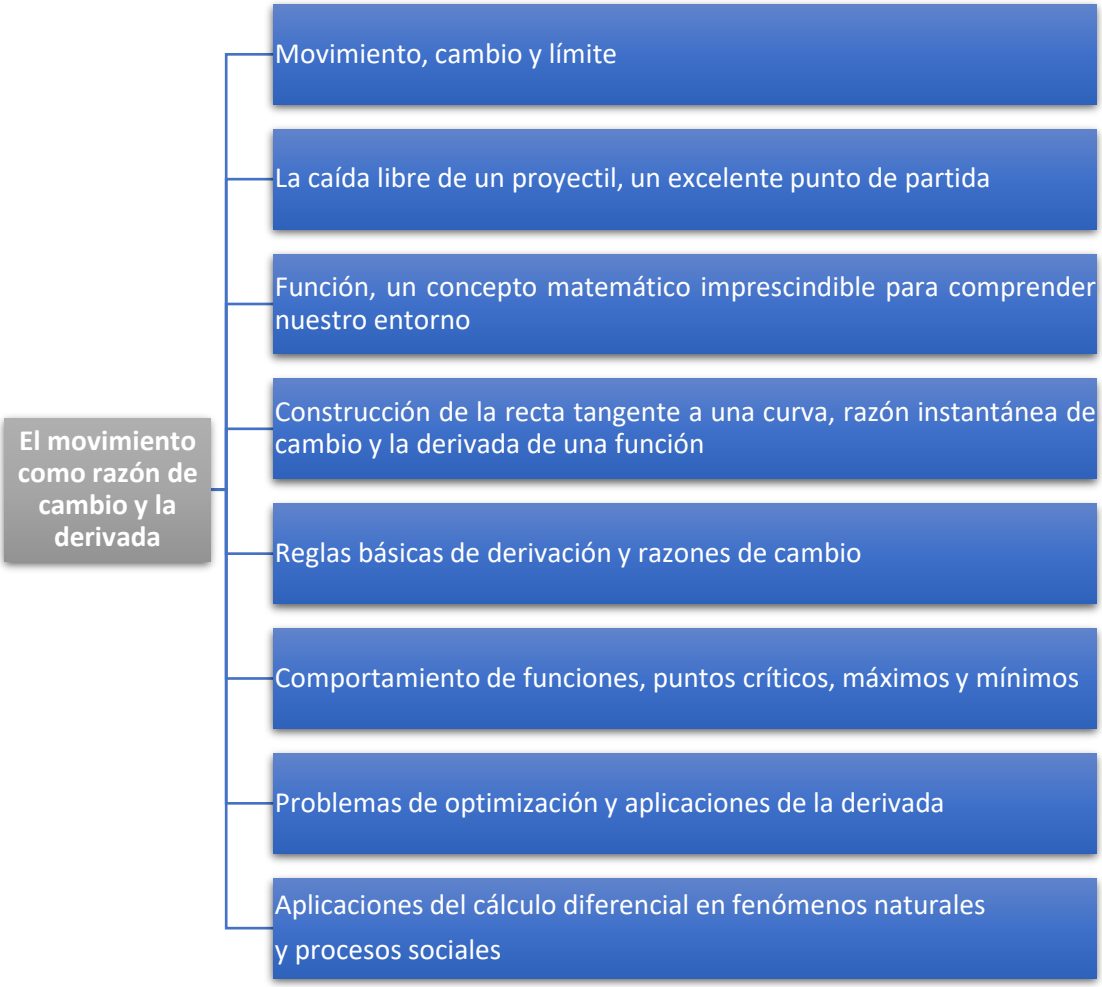
¿Con qué propósito?

El propósito de esta unidad es analizar de manera crítica y objetiva los comportamientos de los **fenómenos naturales y/o procesos sociales** propios del entorno mediante la aplicación de los conceptos de **razón de cambio, límite, derivada y elaboración de gráficas.**

¿Qué saberes trabajaré?

Cuando identificas y aplicas **modelos matemáticos** para llevar a cabo el análisis de tu entorno, desarrollas conceptos y habilidades matemáticas que dan origen a la herramienta más poderosa de esta disciplina, el cálculo. A partir de tus conocimientos previos en matemáticas y otras áreas, así como del concepto de **movimiento** como eje rector del presente libro se introduce y desarrolla el concepto de **derivada de una función** que permite identificar y predecir el comportamiento de diversos fenómenos naturales y procesos sociales. El estudio del **cambio climático**, los **movimientos telúricos de la corteza terrestre (sismos) y la caída libre de los cuerpos** cerca de la superficie terrestre, sin considerar la resistencia del aire, representan un importante punto de partida para comprender y aplicar conceptos **como distancia, desplazamiento, velocidad, rapidez y aceleración**, los cuales forman parte central del **movimiento rectilíneo uniforme y acelerado**.
Conocerás funciones que representan distintos **tipos de movimientos**, también aprenderás a **despejar variables** en diferentes funciones para obtener información sobre objetos en movimiento usando representaciones y **métodos** tanto **gráficos** como **algebraicos** para describir mejor el comportamiento del problema real. Comprenderás mejor diversas situaciones que involucran al movimiento y expresarás con claridad ideas y conceptos relativos al cálculo.

Aprenderás que los modelos matemáticos permiten expresar cantidades físicas empleando diferentes **sistemas de unidades y referencia**; de esta manera podrás trasladar información del mundo real al matemático y viceversa. Además, valorarás la importancia del uso de herramientas tecnológicas como apoyo para describir y resolver problemas reales que involucren razones de cambio. Al mismo tiempo que adquieres las competencias mencionadas aprenderás a ser más analítico, creativo, autónomo y sistemático.



Esta unidad, denominada **El movimiento como razón de cambio y la derivada**, se basa en el estudio y tratado de nuestro entorno a partir de los conceptos de movimiento, cambio y límite.

Movimiento, cambio y límite

El movimiento es una característica de las cosas que existen en la naturaleza, desde partículas muy pequeñas como los átomos y los electrones, hasta los cuerpos de grandes dimensiones como los planetas y las galaxias que experimentan cambios con respecto a su posición; dicho de otra forma, nada permanece eternamente en estado de reposo.

La naturaleza transforma constantemente la materia, la cual se encuentra en movimiento, y al hacerlo realiza un proceso que altera o modifica su estado o constitución, es decir, la cambia.

La rama de la matemática que proporciona el método de análisis cuantitativo y cualitativo de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud respecto de otra es el Cálculo, también llamado **Análisis matemático**, que constituye en esencia un método que utiliza como base el concepto de los infinitesimales, el cual también se conoce como límite. El **límite** tiene que ver con los procesos infinitos en el razonamiento matemático; tales procesos infinitos se habían evitado hasta antes de inventarse el cálculo.

La dependencia del movimiento en los fenómenos naturales y los procesos sociales

A través de la historia los cambios incesantes de la naturaleza han detonado procesos permanentes de movimientos y de transformaciones que influyen en la vida humana y su existencia misma.

a) El clima, motor de movimiento social

Sin duda el clima en la Tierra es un factor crucial para la vida y subsistencia de todos los seres humanos. En todas las épocas la sociedad ha tenido que afrontar la variabilidad del clima, en particular los fenómenos extremos. Hablar del clima de un lugar implica hablar de continuo movimiento, ya que con su constante variación afecta la vida cotidiana, las actividades económicas y las condiciones sociales y culturales de ese lugar.

Los conocimientos y datos climáticos, obtenidos tanto de fuentes científicas y tradicionales como empíricas, encuentran aplicaciones diversas para muy distintos fines. Para entender los mecanismos propios del clima, es necesario comprender que todos ellos están vinculados al denominado **sistema climático** (véase el gráfico 1).

Ciertos gases atmosféricos, como el dióxido de carbono, contrarrestan la pérdida de calor hacia el espacio, dando lugar al conocido efecto invernadero, que mantiene la Tierra a mayor temperatura de lo que cabría esperar. Esos elementos actúan y reaccionan entre sí en un flujo constante, creando pautas continuamente cambiantes de temperatura, nubes, lluvia y viento, entre otros y determinando regímenes climáticos característicos, como los de desiertos, trópicos cálidos y húmedos, bosques montañosos fríos, y demás.



Uno de los requisitos importantes de la información climática está relacionado con el futuro, es decir, con la toma de decisiones sobre lo que sucederá o podría suceder en un periodo inmediato, mediato o de largo plazo. La manera más sencilla de estimar las condiciones climáticas por adelantado consiste en presuponer que las pautas futuras serán muy similares a las del pasado, tal como lo hacen suponer las estadísticas climatológicas, ya que el sistema climático está configurado por los mismos procesos año tras año.

Hay otras maneras de estimar lo que sucederá en el futuro, por ejemplo considerar otras características del sistema climático, como las fluctuaciones de temperatura del océano o las variaciones de los niveles de gases de efecto invernadero (dicha situación se trata y estudia más adelante).



Revisa más de este tema en:

Sismicidad es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 9** página 135.

b) Los sismos

También un sismo implica movimiento, siendo otro ejemplo de fenómeno natural que implica movimiento y tiene repercusiones en los procesos sociales. Los sismos son resultado de movimientos de las capas geológicas en el interior de la Tierra que liberan de forma repentina enormes cantidades de energía, a pesar de estar siempre en movimiento. Dicha energía se propaga en forma de ondas que provocan movimientos de la superficie terrestre, mismos que conocemos como sismos o terremotos.

Para entender el origen de un sismo se debe considerar que la capa más superficial de la Tierra, denominada **litosfera**, es una capa rígida compuesta por material que puede fracturarse al ejercer una fuerza sobre él y forma un rompecabezas llamado **placas tectónicas**.

Como se puede observar las consecuencias de los desastres naturales pueden ser muy significativas y destruir en pocos segundos miles de vidas e inmensos y sostenidos esfuerzos económicos de los países.

Para que se produzca un desastre, además de la acción de la naturaleza debe estar asociada la vulnerabilidad generada por el hombre. Se entiende por vulnerabilidad el aumento en la ocupación irracional del territorio, el crecimiento de la población, viviendas e infraestructura inadecuadas, los procesos de degradación ambiental, entre otros factores.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 4 sobre el **uso de gráficas** de la página 30 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 191 del Apéndice 1.

Analizar la información sobre la variación de la temperatura, la precipitación pluvial o los movimientos telúricos con respecto al tiempo y en diferentes regiones, permite no sólo identificar escenarios que se gestan en diferentes períodos, sino que cobra relevancia al predecir factores de riesgo y la viabilidad de la toma de decisiones para la prevención de desastres.

Las matemáticas representan una herramienta poderosa para modelar situaciones o problemas reales a partir del concepto **función**, y una de las más importantes para el planteamiento y resolución de diversos problemas relacionados con procesos de cambio es lo que conocemos hoy en día como **derivada de una función**, que de forma objetiva describe la comparación entre magnitudes que cambian instantáneamente, es decir, describen la **razón instantánea de cambio**.

La caída libre de un proyectil, un excelente punto de partida

Revisa más de este tema en:

Caída libre es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 19** página 60.

Con base en la ley de caída libre propuesta por Galileo, la distancia desde el nivel del piso de un proyectil que cae desde una cierta altura (despreciando la resistencia del aire) está expresada por la función cuadrática siguiente: $d(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+d_0$ ... (1)

donde: $d(t)$ es la función distancia que representa el movimiento del proyectil y t es la variable independiente que representa el tiempo transcurrido.

$g = -9.8\,m/s^2$ representa el valor aproximado de la aceleración debida a la gravedad (el signo negativo hace referencia al movimiento del objeto con dirección al centro del planeta); d_0 es la distancia inicial al suelo desde donde se suelta o arroja el proyectil y v_0 es la velocidad inicial del proyectil.

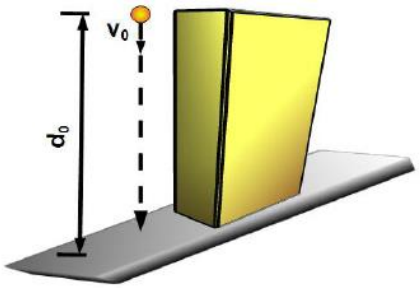


Figura 1 Movimiento de un proyectil que cae libremente, despreciando la resistencia al aire, con velocidad inicial v_0, desde una distancia inicial d_0 y bajo la influencia de la fuerza de atracción terrestre (gravedad).

Ejemplo:

Analicemos un problema particular del movimiento de un proyectil en caída libre, donde el objetivo será el determinar la velocidad justo en el primer segundo transcurrido. Para ello consideremos que dicho móvil se deja caer (velocidad inicial cero) desde la azotea de un edificio cuya altura es de 78.4 metros.

Entonces, ¿qué ecuación se obtiene al sustituir los datos en la ecuación (1)?

Solución

La función distancia depende del tiempo y describe el movimiento del objeto.

$$d(t)=-4.9t^2+78.4$$

Ésta es una función cuadrática que puede ser representada gráficamente en el plano cartesiano, donde el signo negativo del coeficiente del término t^2 indica que se trata de una parábola cóncava hacia abajo.

Eje de simetría es el eje vertical $d(t)$

Los cortes en los ejes de coordenadas del plano cartesiano (tiempo vs distancia) se determinan a continuación.

Si hacemos $t=0$ en la función distancia $d(t)$, entonces:

$$d(0)=-4.9(0)+78.4=78.4$$

El valor 78.4 determina el punto $(0,\ 78.4)$ que representa el corte en el eje vertical.

Si hacemos d(t) = 0, y sustituimos queda: $0=-4.9t^2+78.4$; al sustituir la variable independiente se obtiene: $t=\pm\sqrt{\dfrac{78.4}{4.9}}=\pm\sqrt{16}=\pm 4\ \ s$

Los puntos donde corta la parábola al eje horizontal son $t_1=(-4,0)$ y $t_2=(4,0)$. De hecho el tiempo establecido por t_2 es el momento de impacto del proyectil con el piso, mientras que el tiempo t_1 carece de sentido en el fenómeno estudiado.

De acuerdo con el problema planteado la gráfica de la función distancia sólo tiene sentido para cualquier $t\geq 0$, así que para poder determinar la distancia del proyectil respecto al piso basta con evaluar la función en cualquier tiempo $t\in[0,4]$, es decir, dentro de dicho intervalo, lo que nos indica por qué no tiene significado el tiempo $t_1=(-4,0)$.

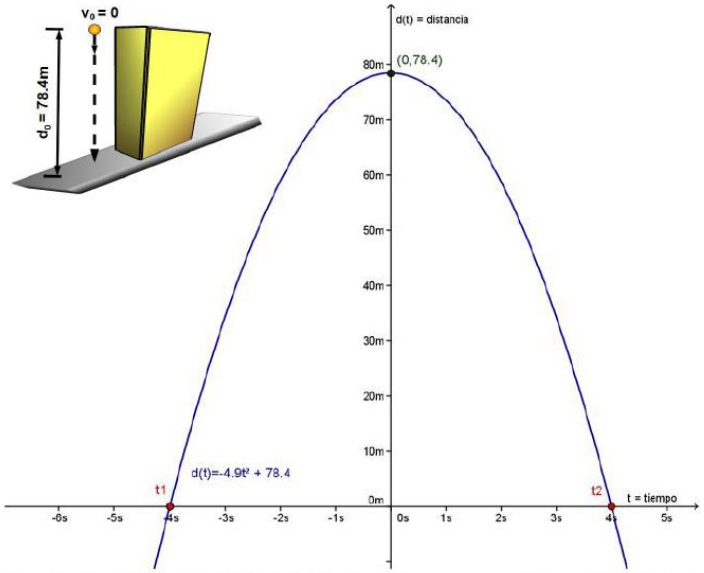


Figura 2a y 2b. (a) Representación física de la distancia recorrida por un proyectil que cae libremente desde una altura de 78.4m y con velocidad inicial cero. (b) Gráfica de la función cuadrática (ecuación 2) que representa el movimiento del proyectil, una parábola con vértice en el punto (0, 78.4), cóncava hacia abajo y con cortes en el eje horizontal en t_1 y t_2 respectivamente.

Para determinar la **velocidad** del proyectil en cualquier instante conviene recordar algunos principios de la física. Si un cuerpo en movimiento tiene una **velocidad constante**, entonces ésta queda expresada como el cociente de la distancia entre el tiempo de la siguiente forma:

$$v = \frac{d}{t}$$



Revisa más de este tema en:

velocidad es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 19** página 24.

Pero si la velocidad del cuerpo o proyectil en movimiento no es constante, como sucede en el problema que estamos analizando, entonces se define la velocidad media o promedio a través del cociente entre la diferencia de las distancias y las del tiempo, como lo representa la siguiente expresión matemática:

$$v_{promedio} = \frac{d\left(t_f\right) - d\left(t_i\right)}{t_f - t_i}$$

La velocidad promedio es la distancia final menos la distancia inicial entre el tiempo final menos el tiempo inicial, es decir, representa la razón del incremento de la distancia respecto al incremento en el tiempo. Debe quedar claro que la definición anterior está basada en la idea de aproximar la velocidad del proyectil en un intervalo de tiempo a partir de una velocidad constante conocida como velocidad promedio o velocidad media.

De esta forma la velocidad promedio permite realizar aproximaciones para determinar la velocidad del proyectil en un determinado instante. Es importante resaltar que las aproximaciones ofrecen resultados más precisos conforme el intervalo en el tiempo se reduce.

En el lenguaje de las matemáticas el concepto llamado **límite**, representa el valor constante al que tienden las aproximaciones infinitas de las velocidades promedio conforme el incremento en el tiempo tiende a cero.

A la herramienta matemática, tan importante en el estudio y tratado de fenómenos naturales y procesos sociales, se conoce como **método de incrementos** y contribuye en la determinación de la razón instantánea de cambio. Este tipo de análisis se puede aplicar al estudio de fenómenos sociales.

Método de los incrementos

Este método consiste en aumentar una determinada cantidad arbitraria a una de las variables y proceder a analizar el comportamiento de la función incrementada. Consideremos un intervalo de tiempo, expresado en términos generales a partir de $\left[t,\ t+\Delta t\right]$ en donde se ha introducido la notación Δt (delta t) que significa incremento del tiempo. Ahora calculemos la velocidad promedio entre el tiempo t y $t+\Delta t$, para la función distancia descrita anteriormente:

$$v_{promedio} = \frac{d\left(t_f\right) - d\left(t_i\right)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d\left(t+\Delta t\right) - d\left(t\right)}{\left(\Delta t + t - t\right)}$$

Sustituyendo valores:

$$v_{promedio} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{-4.9\left(t+\Delta t\right)^2 + 78.4 - \left(-4.9t^2 + 78.4\right)}{\Delta t}$$

y desarrollando se obtiene: $v_{promedio} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = -9.8t - 4.9\Delta t$

Si el incremento del tiempo tiende a cero (es cada vez más pequeño), se aproxima al valor de la velocidad instantánea en el tiempo t, esto implica que el segundo sumando tienda a cero también (se hace arbitrariamente pequeño), en otras palabras, la velocidad promedio tiende a $-9.8t$. En lenguaje matemático, lo anterior se expresa de la siguiente forma:

$$v_{instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \{ v_{promedio} \} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\Delta d}{\Delta t} \right\}$$

donde $\lim_{\Delta t \to 0} \{\ \}$, representa la notación matemática del concepto denominado **límite**, el que al final de la presente sección se describe en palabras de Isaac Newton y se presenta una definición.

Es decir, en términos del problema planteado se tiene que:

$$v_{instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \{ -9.8t - 4.9\Delta t \} = -9.8t$$

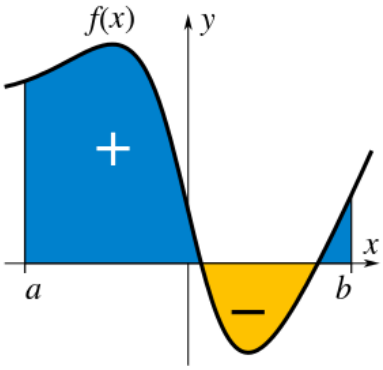


Gottfried Leibniz

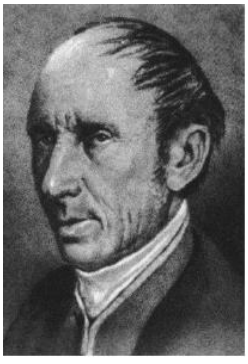
La idea y desarrollo del concepto del límite como **método de análisis matemático** fue producto del trabajo de muchas generaciones que comenzaron con Arquímedes, uno de los grandes exponentes de las matemáticas de la antigua Grecia, hasta culminar con los trabajos de Issac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) en el siglo XVII, quienes desarrollaron el cálculo matemático que hoy en día se utiliza para estudiar y tratar fenómenos naturales y procesos sociales.

El cálculo se desarrolló gracias a cuatro importantes problemas en los que los matemáticos europeos trabajaban durante el siglo XVII:

- El problema de la velocidad y la aceleración.
- El problema de la recta tangente.
- El problema de máximos y mínimos.
- El problema del área en figuras cuya frontera es curva.



Cada uno de estos problemas comprende la noción del límite y es posible tratar el cálculo matemático con cualquiera de ellos. El primero de los problemas mencionados es precisamente el que se ha estudiado en esta sección como ejemplo y cuya solución contribuyó al origen del concepto de derivada de una función y al denominado **Cálculo diferencial**. El segundo y el tercer problema mencionados tienen relación con la **derivada** y el Cálculo diferencial. El último problema nos permite, entre otras cosas, calcular áreas de figuras con frontera curva, o la distancia recorrida por un móvil, y esto representa el origen del **Cálculo integral.**



Augusto Cauchy.

Este nuevo método de análisis, el límite (y en general el Cálculo diferencial e integral), tuvo enormes repercusiones en la ciencia y la tecnología, en especial en la mecánica y en la solución de problemas de geometría. La rápida extensión de las aplicaciones del cálculo motivaron el desarrollo de otras ramas de la matemática como la teoría de series y las ecuaciones diferenciales. En un principio, en la época de Newton, el cálculo no era muy conocido; la notación definitiva y el formalismo que actualmente se utiliza se asentó hasta la mitad del siglo XIX con el trabajo del matemático francés Augusto Cauchy (1789-1857).

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la **actividad de autoevaluación** que aparece en las págs., 42 y 43 y corrobora tus respuestas en las págs., 193 a 198 del Apéndice 1.



Pierre Simon Laplace.

El francés Pierre Simon Laplace fue uno de los grandes defensores del denominado determinismo, una doctrina filosófica que sostiene que todo acontecimiento físico, incluyendo el pensamiento y las más diversas acciones humanas, están causalmente determinados por la irrompible cadena causa-efecto. Simon Laplace llegó a pensar que sólo con conocer la posición y velocidad inicial de cualquier cuerpo celeste o partícula se podría describir puntualmente y con detalle la trayectoria completa a través del tiempo (pasado y futuro) de dicha partícula o cuerpo.

Hoy en día existen teorías científicas revolucionarias, como el caos o la dinámica no lineal en sistemas complejos, que se contraponen a los principios y al trabajo realizado bajo el determinismo laplaciano. Sin embargo la herramienta matemática conocida con el nombre de **función** permite representar y estudiar a través de lenguaje simbólico el comportamiento de nuestro entorno.

Función, un concepto matemático imprescindible para comprender nuestro entorno

En la naturaleza y en casi todas las cuestiones prácticas del quehacer humano encontramos relaciones entre magnitudes que varían unas respecto de otras. Se han descubierto con base en la observación y la experimentación y constituyen la base sobre la cual a través de siglos se ha logrado instituir el concepto matemático de función, el cual permite la descripción simplificada de todo aquello que nos rodea, desde el microcosmos hasta el macrocosmos, como muestra de interacción y movimiento de la materia.

El concepto de función matemática es en términos prácticos lo siguiente:

Es el valor o la variación de una magnitud que queda determinada por otra magnitud de acuerdo con una cierta *regla*. A la primera magnitud se le denomina ***variable dependiente***, mientras que la segunda recibe el nombre de ***variable independiente***. Al conjunto de valores o números de la variable independiente se le llama **dominio** de la función, que en otras palabras, representa el conjunto donde está bien definida. La descripción de función de una variable independiente se materializa en términos de símbolos matemáticos y a la vez es representada mediante una gráfica, gracias al trabajo de *René Descartes* (1596-1650), con lo cual nació la geometría analítica.

La notación para describir una función matemática es $y = f(x)$, que se lee como: y es función de x. En la siguiente figura se representa gráficamente una función en el plano cartesiano.

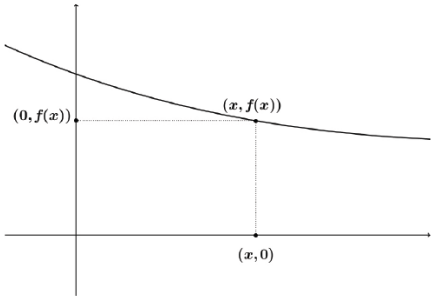


Figura 3 La gráfica de la función $y = f(x)$ representa una curva en el plano cartesiano determinada por puntos definidos con coordenadas de la forma $(x, y) = (x, f(x))$.

Las funciones tienen cuatro componentes principales:

1. El **dominio** o conjunto de los valores de la variable independiente x para los cuales está definida la función. Dichos valores se ubican a lo largo del eje horizontal (abscisas) del plano cartesiano y permiten que los valores de la variable dependiente y queden determinados por la relación: $f(x) = y$.
2. La **regla** $f(x)$ que relaciona cada valor de la variable independiente x con un único valor de la variable dependiente y.
3. La **imagen** o conjunto de los valores de la variable dependiente y que se ubican a lo largo del eje vertical (ordenadas), y cuyo valor se determina al aplicar la función a los valores asignados de la variable x.
4. La gráfica de la función o el conjunto de puntos en el plano cartesiano $(x, y) = (x, f(x))$.

Por lo tanto:

Una función matemática es una relación f, constituida por un conjunto de pares ordenados (x, y) que forman el conjunto solución de una ecuación de la forma $y = f(x)$, llamada **regla de correspondencia entre dos conjuntos (dominio y codominio)**, y en el que no existen dos pares diferentes que tengan el mismo primer componente (véase la figura 4).

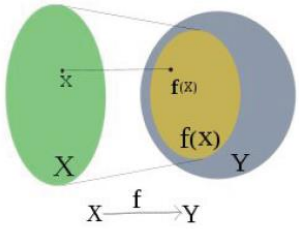
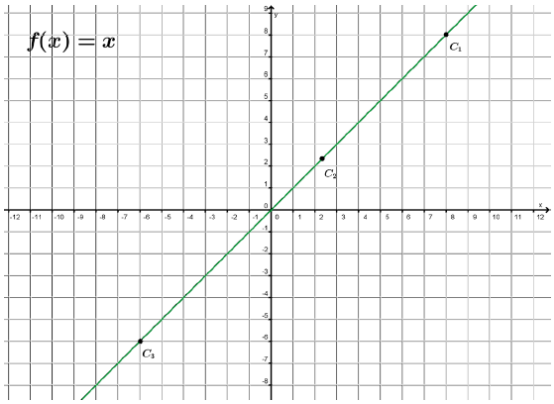


Figura 4 La relación entre el conjunto X (dominio) y el conjunto Y (codominio) queda establecida por la función f. El óvalo pequeño (subconjunto) dentro del codominio es precisamente la imagen o rango de la función.

A continuación se describen gráficamente algunas de las funciones matemáticas que suelen ser útiles para estudiar diferentes fenómenos naturales y procesos sociales.



La función lineal

Como su nombre lo indica, la gráfica de la función lineal es siempre una **línea recta**, cuya forma general es: $f(x) = mx + b$ lo que significa que multiplicamos el valor de "x" m veces y después agregamos "b" unidades. Gráficamente esto se puede ver de la siguiente forma:

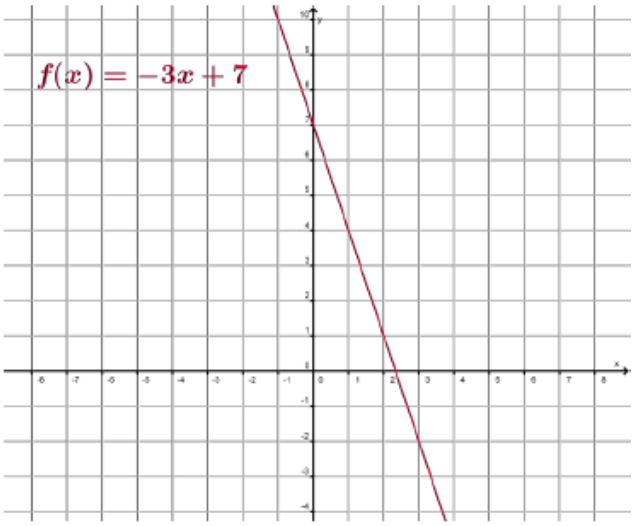
Ejemplo:

Completa la tabla y realiza la gráfica de la función: $f(x)=-3x+7$

	$f(x)=-3x+7$
2	$f(2)=-3(2)+7=-6+7=1$
1	$f(1)=-3(1)+7=-3+7=4$
0	$f(0)=-3(0)+7=0+7=7$
-1	$f(-1)=-3(-1)+7=3+7=10$
-2	$f(-2)=-3(-2)+7=6+7=13$

x	y
2	1
1	4
0	7
-1	10
-2	13

Sustituyendo los valores en el plano cartesiano, tenemos la siguiente línea recta:



Con base en lo que analizaste anteriormente podemos decir que en la fórmula $f(x)=mx+b$, m representa la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen (punto donde corta la recta al eje $y=f(x)$.

Revisa más de este tema en:

Función lineal es un tema que podrás revisar también en el **Módulo 8** página 57.

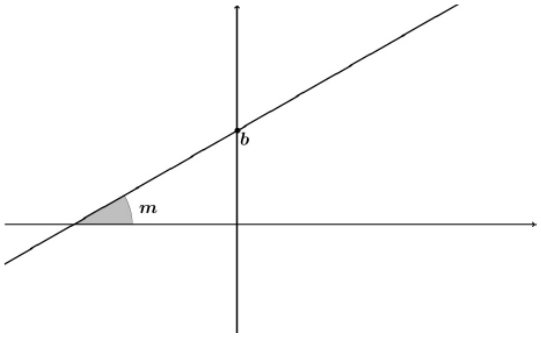


Figura 5 Gráfica de una función lineal con pendiente (inclinación) m y ordenada al origen b.

La función cuadrática en la variable x

¡Ojo, competencia transversal!

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Donde: a, b y c son cualquier número real, con $(a\neq 0)$.

Revisa más de este tema en:
Función cuadrática es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas, Módulo 3** página 145**, Módulo 8** página 61 y **Módulo 19** página 69.

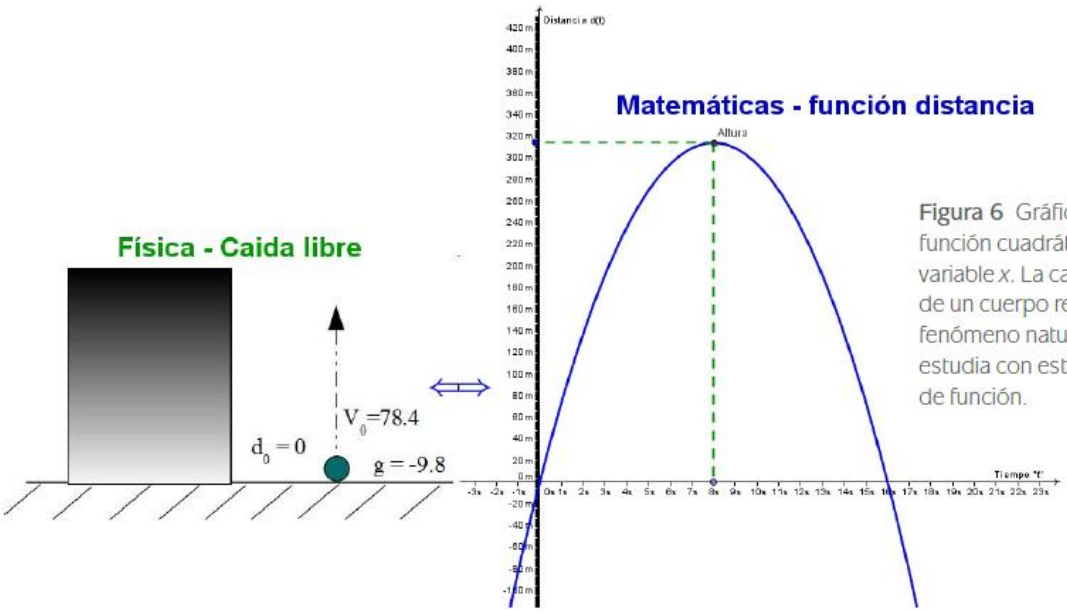
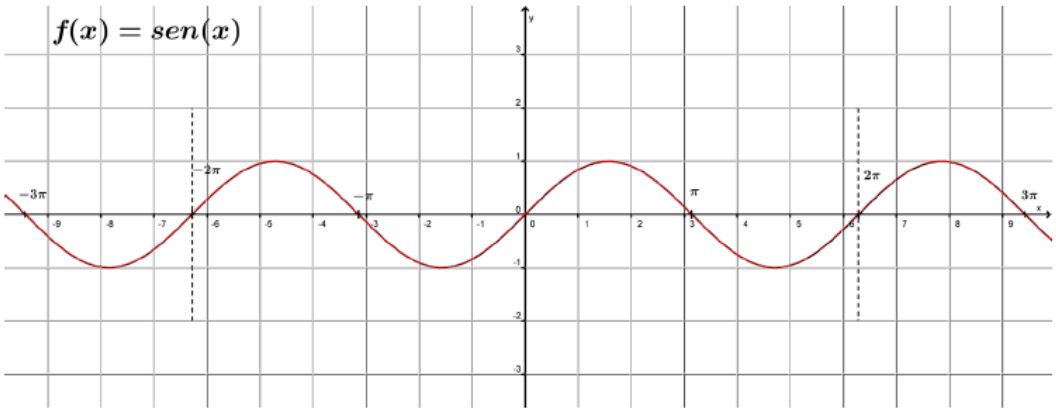


Figura 6 Gráfica de una función cuadrática en la variable x. La caída libre de un cuerpo representa un fenómeno natural que se estudia con este tipo de función.

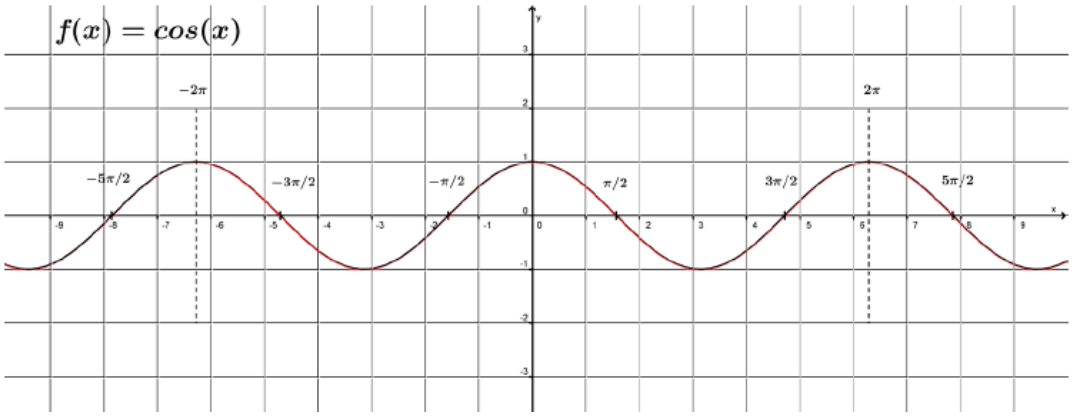
Las funciones trigonométricas (principales y secundarias)

Las funciones trigonométricas principales son: $(\operatorname{sen} x)$, $(\cos x)$, $(\tan x)$, donde la función seno está definida por $\operatorname{sen}: R\to[-1,1]$, es decir, el dominio de la función seno es el conjunto de los números reales y la imagen es el intervalo $[-1,1]$. Además tiene amplitud 1 y es de período 2π.

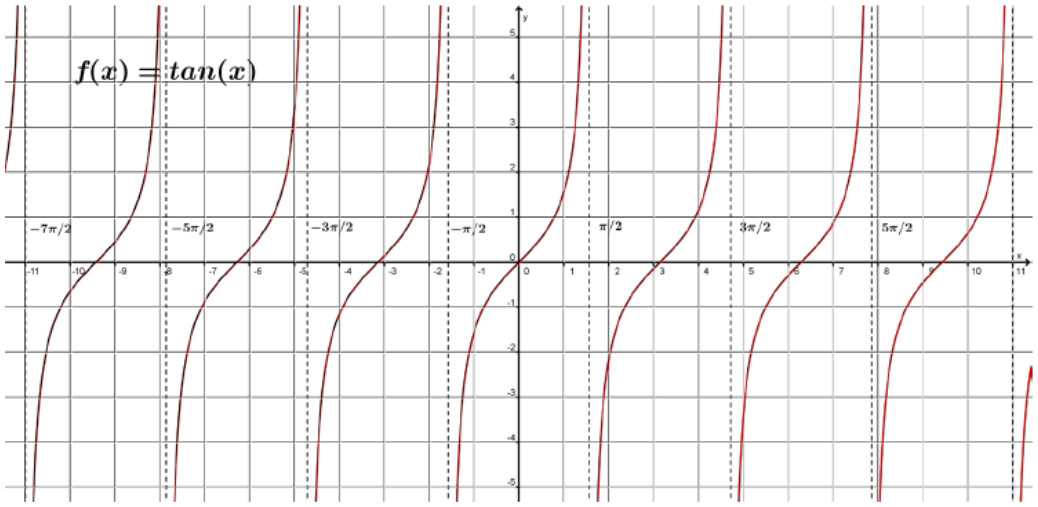
Revisa más de este tema en:
Funciones trigonométricas es un tema que podrás revisar también en el **Curso Propedéutico de Matemáticas.**



La función coseno está definida por cos : $R \to [-1,1]$, es decir, el dominio de la función coseno es el conjunto de los números reales y la imagen es el intervalo $[-1,1]$. Además tiene amplitud 1 y es de período 2π .



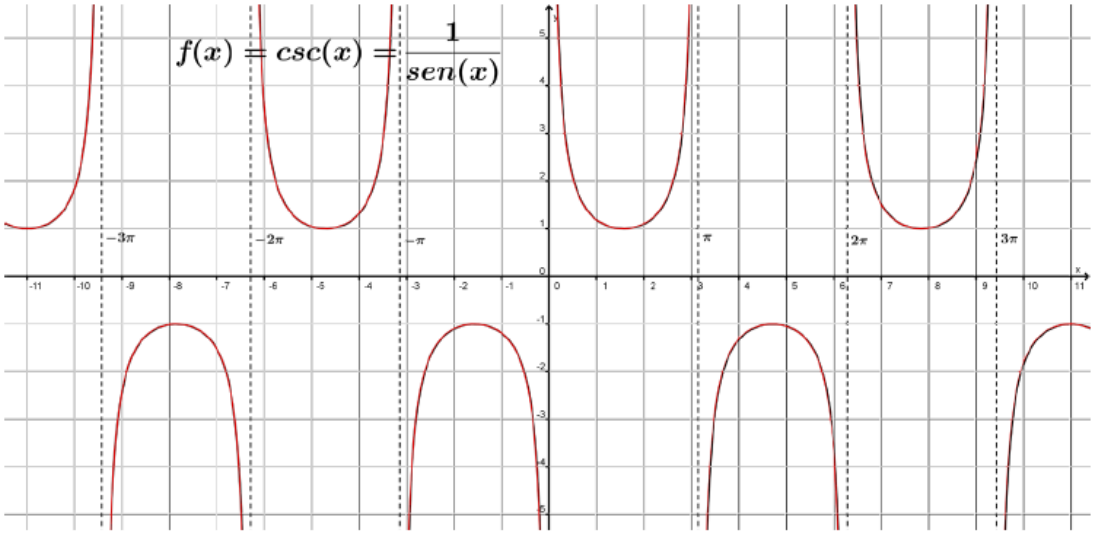
La función tangente está definida por tan : $R \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z \right\} \to R$, con amplitud no definida y de periodo π . En otras palabras, el dominio es el conjunto de los números reales sin contemplar los múltiplos enteros impares de pi medios, y la imagen son todos los reales.



Las funciones trigonométricas secundarias son cosecante, secante y cotangente:

$$\csc(x)=\frac{1}{\operatorname{sen}(x)},\ \sec(x)=\frac{1}{\cos(x)},\ \cot(x)=\frac{1}{\tan(x)},\ \text{donde:}$$

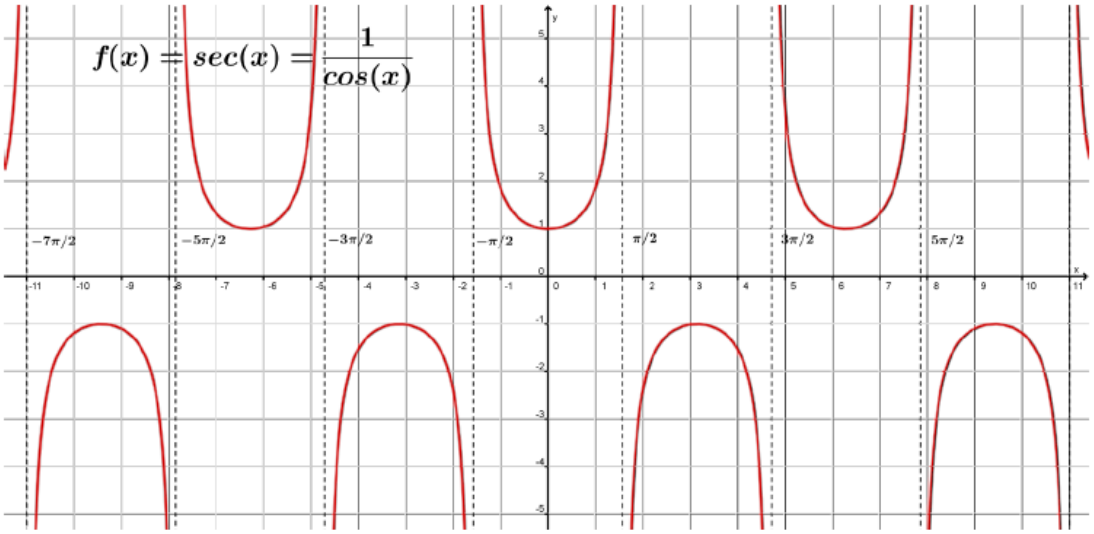
La función cosecante se define mediante csc : $R\setminus\{k\pi\,|\,k\in Z\}\to(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, , con amplitud no definida y de periodo 2π , y se lee como: el dominio es el conjunto de los números reales sin contemplar los múltiplos enteros de pi, y la imagen son los números reales sin contemplar el intervalo $(-1,\ 1)$.



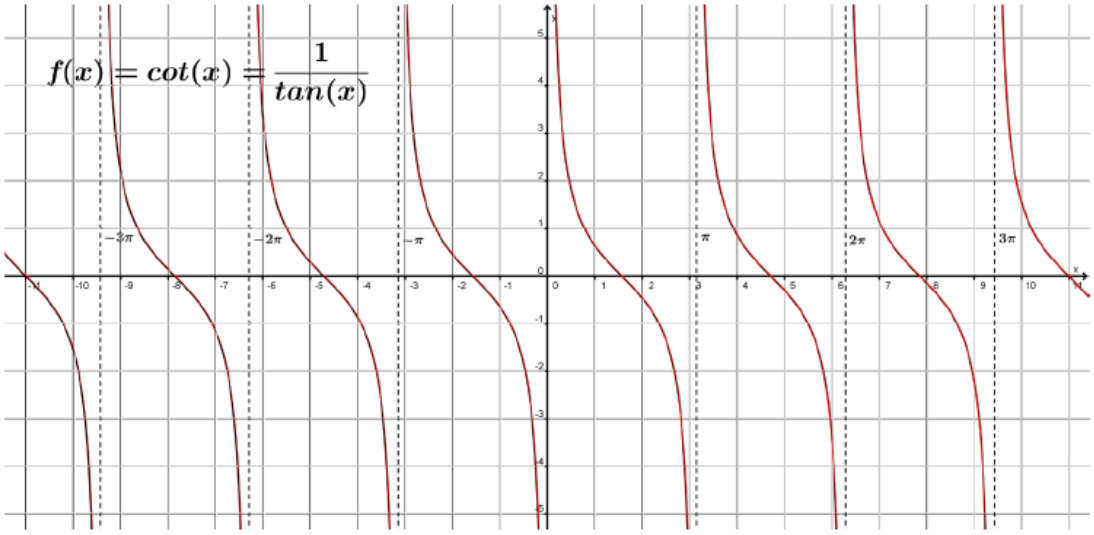
La función secante se define mediante sec :

$$R\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}\to(-\infty,-1]\cup[1,\infty),$$

con amplitud no definida y de periodo 2π .



La función cotangente se define mediante $\cot : R \setminus \{k\pi \mid k \in Z \to R\}$, con amplitud no definida y de periodo π.



La función valor absoluto

Se define de la siguiente manera: $f(x) = |x|$, donde el valor absoluto se define mediante la ecuación $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ (véase la figura 7).

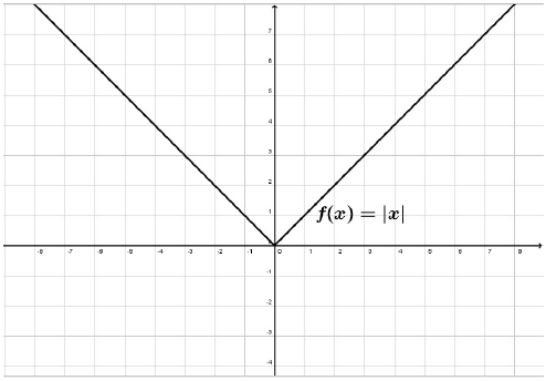


Figura 7 Gráfica de la función valor absoluto de x.

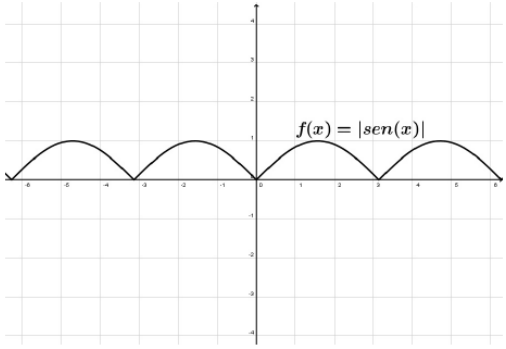
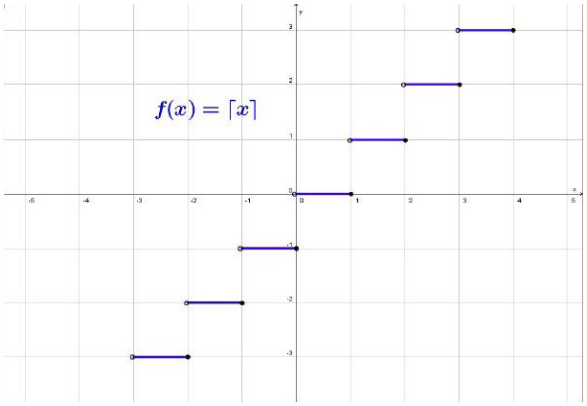


Figura 8 Gráfica de la función valor absoluto del sen(x).

Ahora bien, si se define $g(x) = |sen(x)|$, entonces se tiene un ejemplo del valor absoluto de una función cuya gráfica se presenta en la figura 8.

La función escalonada

Una función escalonada es aquella que al trazar la curva ésta no es continua (es decir, se despega el lápiz al dibujarla). El ejemplo más común de función escalonada es la llamada función parte entera, definida $f : R \to Z$, que toma un número real y da como resultado un número entero mayor o menor a ese número.



La función raíz cuadrada

Cuando tratamos con ecuaciones y funciones cuadráticas en ocasiones es necesario eliminar el

exponente de la incógnita o variable x. En términos prácticos se ejemplifica a partir del siguiente procedimiento:

Si $x^2 = 16$, entonces $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{16}$, lo cual implica que: $x = \pm 4$.

Lo anterior nos lleva a interpretar la función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$, definida para toda x positiva o igual a cero $(\forall x \geq 0)$, como una función inversa de $g(x) = x^2$ (ver la siguiente figura).

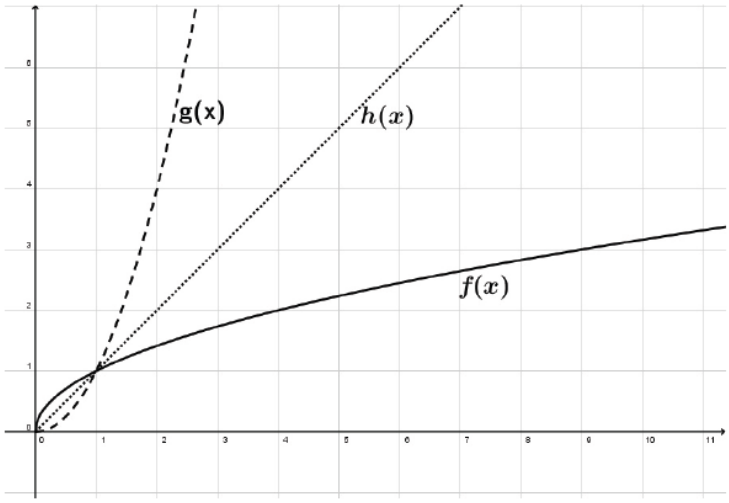


Figura 10 Gráfica de la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$, la inversa (función cuadrática en x), $g(x) = x^2$ y de la función identidad, $h(x) = x$, como resultado de la composición de funciones inversas.

En general, la función identidad, $h(x) = x$ es el resultado de la composición de este tipo de funciones (inversas).

La función exponencial y logaritmo natural

$f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$, donde la función exponencial $f(x) = e^x$, se define $f : R \to (0, \infty)$, y en donde $e \approx 2.7182818284...$. A este número trascendente e irracional por naturaleza, se le conoce como el **número de Euler** en honor al matemático y físico suizo Leonhard Euler (1707-1783).

Una definición común del número de Euler a partir del concepto de límites es: $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

La función logaritmo natural (que es una función inversa de la exponencial) $g(x) = ln\, x$, se define mediante $g : (0, \infty) \to R,$, y en donde se cumple que: $ln(e^x) = x$, o de forma equivalente: $e^{ln(x)} = x$, para toda $x > 0$. El logaritmo de un número x es el exponente y al cual hay que elevar la base para obtener x. Las gráficas de la función exponencial y logaritmo natural (inversas entre sí) se muestran en la siguiente figura.

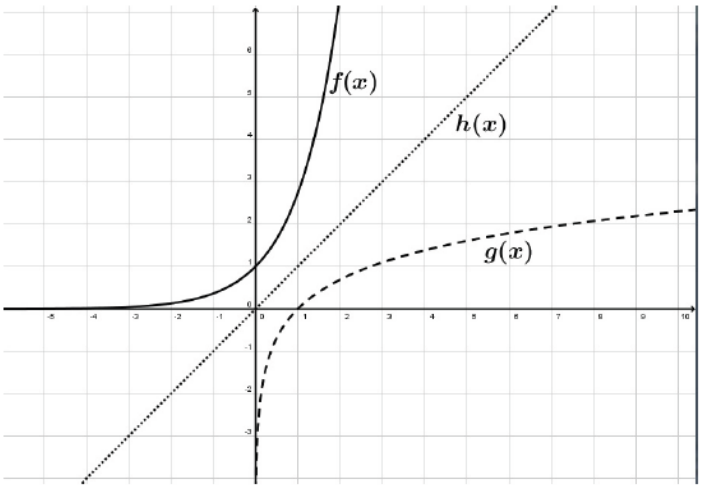


Figura 11 Gráfica de la función exponencial $f(x)=e^x$, la inversa (logaritmo natural) $g(x)=\ln x$, y la función identidad, $h(x)=x$, como resultado de la composición de funciones inversas.

ACTIVIDAD:

- Realiza la actividad 7 sobre **funciones lineales** de la página 56 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 199 a 202 del Apéndice 1.

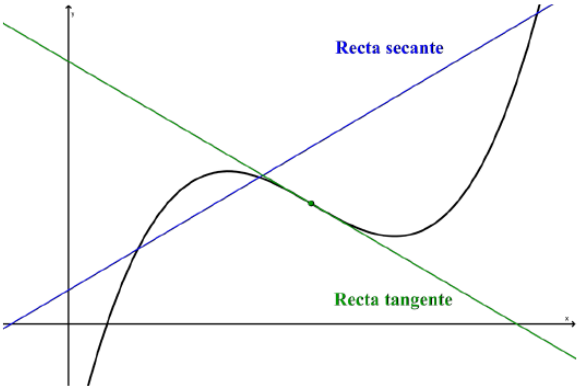
Construcción de la recta tangente a una curva, razón instantánea de cambio y la derivada de una función

El concepto de función matemática nos permite representar mediante una gráfica el comportamiento tanto cualitativo como cuantitativo de los diversos fenómenos naturales y procesos sociales.

Newton, quien abordó el problema de la construcción de rectas tangentes a una curva desde una forma diferente a la utilizada por los griegos. Newton se apoya en el uso de gráficas, las propiedades de las funciones y el análisis racional de los procesos infinitesimales implícitos. Si el problema consiste en determinar la recta tangente a una curva arbitraria entonces se debe centrar en la determinación de la pendiente o inclinación de dicha recta en un punto dado de la curva. Lo anterior dio origen a la derivada de una función y por consiguiente a una de las herramientas más poderosas de las matemáticas, el llamado Cálculo diferencial.

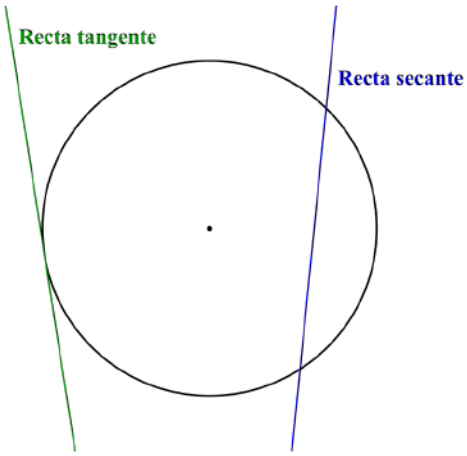
Descripción de la pendiente de la recta tangente a una curva, la derivada

La definición de la **derivada** se puede abordar de dos formas diferentes, la primera es **geométrica** (como pendiente de la recta tangente a una curva) y la segunda es a partir de una **aplicación física** (como una tasa o razón instantánea de cambio).



Examinando a la derivada de manera **geométrica**, es decir la definiremos como la pendiente de la recta

tangente a un punto de la función. Intuitivamente decimos que una recta secante a una función es aquella que interseca al menos en 2 puntos a dicha función.



Recordemos que una recta tangente a una circunferencia es aquella que sólo la toca en un punto. Al generalizar esta idea al contexto de las funciones definimos a la recta tangente como aquella recta que toca la gráfica de una función en un sólo punto.

Supongamos que una función f está definida en un intervalo abierto que contiene el número real x. La gráfica de $y=f\left(x\right)$ y tres rectas secantes, S_1, S_2 y S_3, que pasan a través de los puntos $P\left(x, f\left(x\right)\right)$ y $Q\left(x+\Delta x, f\left(x+\Delta x\right)\right)$, se ilustran en la figura 12. La línea recta punteada, t, representa una posible recta tangente en el punto P.

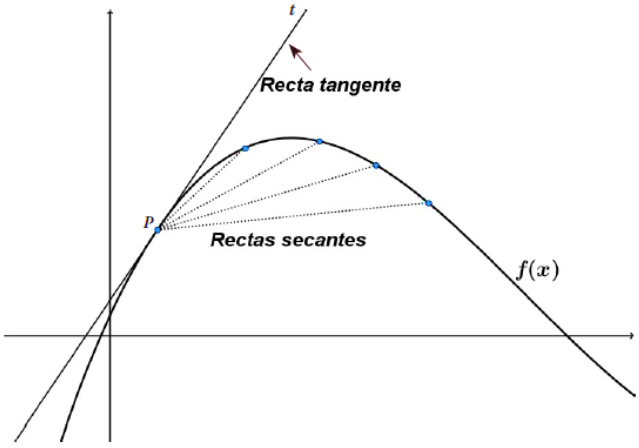


Figura 12 Rectas secantes y una tangente a la curva $y=f(x)$.

Como se puede observar en la figura anterior, cuando Δx (incremento en x) se acerca cada vez más y más a cero, las rectas secantes tienden a la recta tangente t. Ahora bien, puesto que todas estas rectas pasan por el punto $P\left(x, f\left(x\right)\right)$, sus ecuaciones se determinan encontrando las respectivas pendientes.

Observa que la pendiente de la recta secante mostrada en la gráfica está determinada por puntos P y P_1, cuyas coordenadas son respectivamente $\left(x, f\left(x\right)\right)$ y $\left(x+\Delta x, f\left(x+\Delta x\right)\right)$.

De la gráfica se puede deducir que la pendiente de la secante está determinada por la tangente, y por otra parte la **tangente** está definida como cateto opuesto entre cateto adyacente, de donde tenemos que $\left(f\left(x\right)+\Delta x\right)-f\left(x\right)$ es igual al cateto opuesto, $\left(\left(x+\Delta x\right)-x\right)$ es el cateto adyacente, mismo que es igual a Δx; por lo tanto la pendiente de S_1 es igual a:

$$\frac{\left(f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)\right)}{\left(\left(x+\Delta x\right)-x\right)}.$$

De la misma forma, la pendiente de las rectas secantes, m_{sec}, que pasan por los puntos $P\left(x, f\left(x\right)\right)$ y $Q\left(x+\Delta x, f\left(x+\Delta x\right)\right)$ (véase figura 13, donde $\Delta x \neq 0$) queda establecida mediante:

$$m_{\sec} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{f\left(x+\Delta\right)' f\left(x\right)}{x+\Delta x-x}$$

$$m_{\sec} = \frac{f\left(x+\Delta\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$$

La recta tangente tendrá una pendiente m_{tan} cada vez más cercana a la pendiente de la recta secante m_{sec}, conforme $x+\Delta x$ tiende a x, es decir, el incremento se hace cada vez más pequeño $\left(\Delta x \to 0\right)$. Este es el concepto de límite, una vez más. En otras palabras, se tiene que:

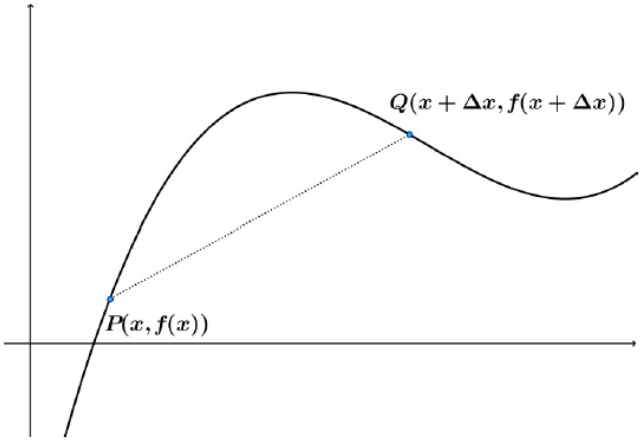


Figura 13 Determinación de la pendiente de las rectas secantes, $m_{...}$, que pasan por los puntos *P* y *O*.

$m_{\tan} = \lim\left(m_{\sec}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$ siempre que el límite exista. Se llama la derivada de la función f en el punto x.

Definición 1 ***La derivada de una función***: Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto x. La derivada de f en x, se escribe $f'\left(x\right)$ está dada por:

$$f'\left(x\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}$$

El símbolo $f'\left(x\right)$ se lee: f prima de x. La terminología $f'\left(x\right)$existe, significa que el límite en la definición 1 existe. Si $f'\left(x\right)$ existe, se dice que la función f es diferenciable en x, o bien que la función f tiene derivada en x.

Para determinar la ecuación de la recta tangente a una curva arbitraria se debe recordar que la ecuación de la recta, o función lineal, tiene la siguiente forma: $y = mx+b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.

La ecuación: $y-y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$ es la ecuación de una recta dado un punto y la pendiente (derivada). Es decir, la derivada de una función representa la pendiente de la recta que es tangente a la curva de dicha función en cierto punto**.**

Derivada de una función:

i. Recta tangente: la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $\left(x, f\left(x\right)\right)$ es $f'\left(x\right)$.

$$m_{\tan} = f'(x)$$

ii. La velocidad instantánea: si un punto P se mueve sobre una línea de tal forma que su coordenada en el tiempo t es $d(t)$, entonces la velocidad instantánea en el tiempo t es $d'(t)$.

$$V_{\text{instantánea}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t+\Delta t) - dt}{\Delta t} = d'(t)$$

Relación entre continuidad y diferenciabilidad de una función

Decir que una función es continua en $x = c$ significa que no existe interrupción en la gráfica de f en c, es decir, su gráfica **no se rompe en dos y tampoco hay agujeros, saltos o brechas**.

Definición de continuidad

Continuidad en un punto: Una función f es ***continua*** en c si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(c)$ está bien definida.
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Continuidad sobre un intervalo abierto: una función *es continua sobre un intervalo abierto* (a,b) si es continua en cada punto del intervalo. Una función que es continua sobre la recta real $(-\infty, \infty)$ es continua en todas partes.

En la siguiente figura se considera un intervalo abierto (a,b) que contiene un número real c. Si la función f está definida en todo el intervalo (a,b), (excepto posiblemente en c), y f no es continua en c, entonces se dice que f tiene una discontinuidad en c. Las discontinuidades se clasifican en dos categorías: **evitables y no evitables**. Se dice que una discontinuidad en c es evitable, si f puede hacerse continua al definir (o volver a definir) $f(c)$ de manera apropiada. Por ejemplo las funciones que se muestran en las figuras 14a y 14c tienen discontinuidades evitables en c, mientras que la función que se muestra en la figura 14b tiene una discontinuidad infinita (no evitable) en c.

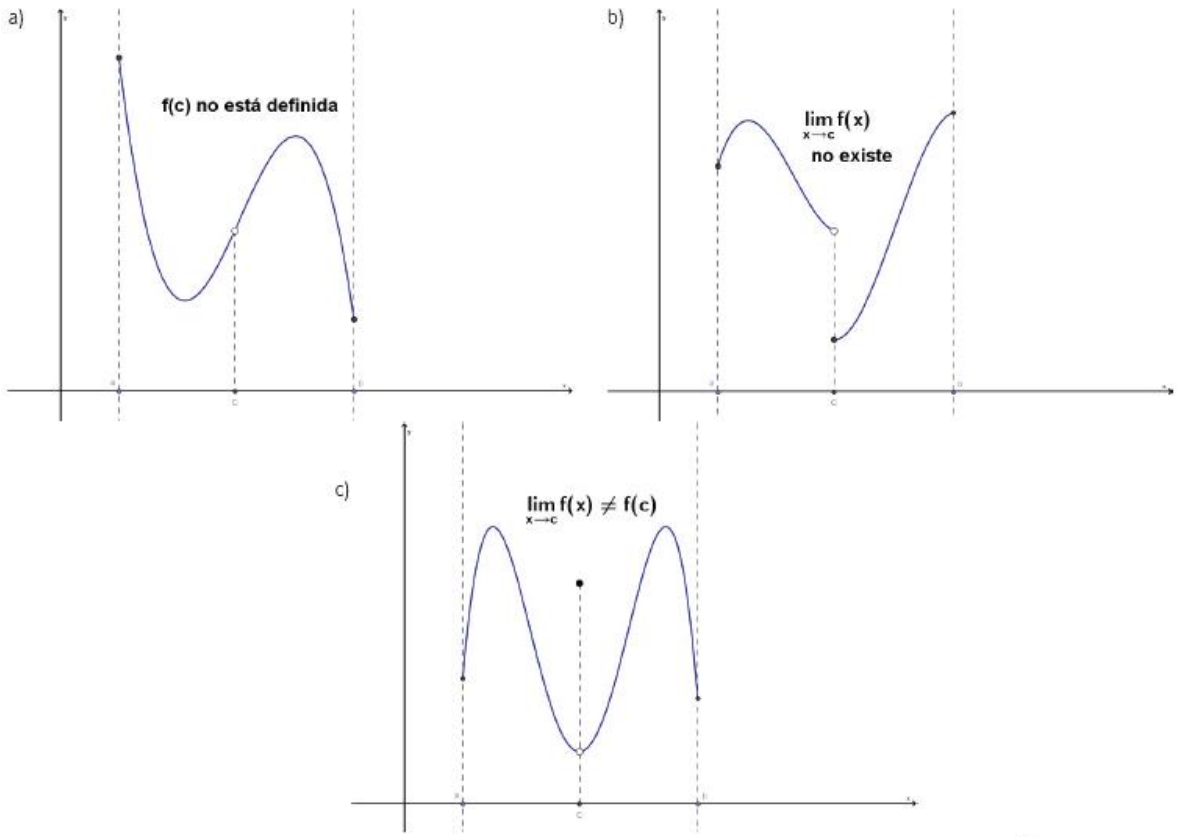


Figura 14a, 14b y 14c a) Discontinuidad evitable, $f(c)$ no está definida. b) Discontinuidad no evitable o infinita, el $\lim_{x\to c} f(c)$ no existe. c) Discontinuidad evitable, el $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$.

Para comprender la continuidad sobre un intervalo cerrado, en primer lugar es necesario plantear un tipo de límite llamado **límite lateral**. El límite desde la derecha significa que x tiende a c desde valores mayores que c.

De manera análoga, el límite desde la izquierda significa que x tiende a c desde valores menores que c, este límite se denota mediante: $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. (Límite desde la izquierda.)

Teorema 0 Existencia de un límite

Sean f una función y, c y L números reales. El límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es L si y sólo si $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$.

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad hacia los intervalos cerrados. Básicamente una función es continua sobre un intervalo cerrado si es continua en el interior del intervalo y posee continuidad lateral en los puntos extremos. Esto se expresa de manera formal de la siguiente forma:

Definición de continuidad sobre un intervalo cerrado.

Una función f es *continua sobre un intervalo cerrado* $[a,b]$, si es continua sobre el intervalo abierto (a,b) y $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

La función f es *continua desde la derecha* en a y *continua desde la izquierda* en b

En términos del **límite**, la forma alternativa siguiente de la derivada de una función es útil en la investigación de la relación entre diferenciabilidad y continuidad.

Definición alterna de derivada. El límite de Pierre de Fermat (1601-1665).

La derivada de la función f en c es $f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, siempre que el límite exista (véase la figura 15).

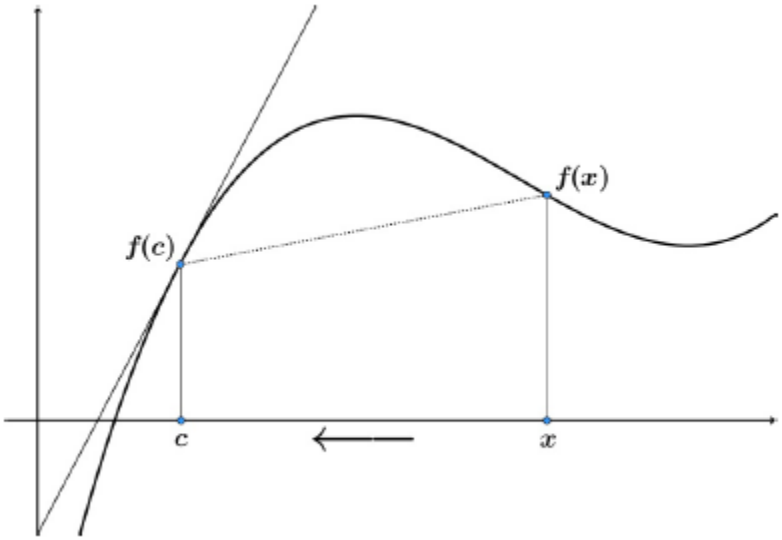


Figura 15 Cuando el valor de *x* tiende al valor de *c*, la recta secante tiende a la recta tangente.

Se debe observar que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los dos límites laterales $\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ y $\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existan y sean iguales.

Estos límites laterales se conocen como derivadas desde la izquierda y desde la derecha, respectivamente. Se dice que f es diferenciable sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, si es

diferenciable sobre (a,b) y si la derivada desde la derecha, en a, y la derivada desde la izquierda, en b, existen.

Si la función no es continua en $x=c$, tampoco es diferenciable en $x=c$.

Teorema 1 La diferenciabilidad implica la continuidad.

Si la función $y=f(x)$ es diferenciable en $x=c$, entonces f es continua en $x=c$.

Reglas básicas de derivación y razones de cambio

Al modelar fenómenos naturales y procesos sociales tratamos con funciones que representan con expresiones matemáticas la situación o problema real.

Se presentan a continuación las principales **reglas de derivación** de funciones que permiten determinar las derivadas sin usar directamente la definición de derivada utilizando límites.



Revisa más de este tema en:

Derivación es un tema que aplicarás en el **Módulo 20** página 113.

Regla de la función constante

Teorema 2 Regla de la constante

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es cualquier número real, entonces:

$$f'(c)=\frac{d}{dx}[c]=0$$

Ejemplos:
Uso de la regla constante

a) $f(x)=8$, entonces $\frac{df}{dx}=f'(x)=0$

b) $y=-3$, entonces $y'=0$

c) $d(t)=k\pi^2$ donde k es una constante, entonces $d'(t)=0$

Regla de la función potencia

Antes de enunciar la siguiente regla se muestra el procedimiento para desarrollar un binomio:

$$(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2 \quad \text{o} \quad (x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$$

Para un entero $n>0$, el desarrollo general (debido a Newton) de un binomio y que se utiliza en la demostración de la regla de la potencia es:

$$(x+\Delta x)^n=x^n+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{2}(\Delta x)^2+\frac{n(n-2)x^{n-3}}{6}(\Delta x)^3+\ldots+(\Delta x)^n$$

Teorema 3 Regla de la potencia

Si n es un número racional, entonces la función $f(x)=x^n$ es diferenciable y

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=nx^{n-1}$$

Para que la función f sea diferenciable en $x=0$, el número n debe ser tal que x^{n-1} esté definido sobre un intervalo que contenga a 0.

Ejemplos:
Uso de la regla de la potencia

a) $f(x)=x^3$, entonces $\frac{df}{dx}=f'(x)=3x^2$

b) $y=-\frac{1}{x^2}$, entonces $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[-x^{-2}\right]=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$

c) Determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $g(x)=x^4$ en el punto $x=1$

Solución:

Como $g'(x)=4x^3$, entonces para $x=1$ se tiene que el valor de la pendiente es:

$m=g'(1)=4(1)^3=4$

Regla del múltiplo constante de una función

Primero observemos el caso trivial en donde la constante k es igual a 0, entonces $kf(x)=0,\ f(x)=0$, por lo cual es una función constante, y por el teorema anterior sabemos que su derivada existe y es 0.

Teorema 4 Regla del múltiplo constante

Si $y=f(x)$ es una función diferenciable y k es un número real, entonces la función $kf(x)$ también es diferenciable y $y'(x)=\frac{d}{dx}\left[kf(x)\right]=k\ f'(x)$

Ejemplos:
Uso de la regla del múltiplo constante

a) Si $g(t)=4t^2$, entonces $g'(t)=\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}\left[4t^2\right]=4\frac{d}{dt}\left[t^2\right]=4(2)t=8t$

b) Si $f(x)=\frac{3}{x^2}$, entonces $f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left[3x^{-2}\right]=3\frac{d}{dx}\left[x^{-2}\right]=3(-2)x^{-3}=-\frac{6}{x^3}$

c) Si

$$y=\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}, \text{ entonces } y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{2}{3}}\right]=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}$$

$$y'=-\frac{1}{3x^{\frac{5}{3}}}=-\frac{1}{3\sqrt[5]{x^3}}$$

Regla de la suma y diferencia de funciones

Teorema 5 Regla de la suma y resta (diferencia)

La suma (o la resta) de dos funciones diferenciables es diferenciable y la derivada de la suma es la suma (o resta) de sus derivadas:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\pm g(x)\right]=f'(x)\pm g'(x)$$

Ejemplos:
Uso de la regla de la suma y resta

a) Si $g(t)=3t^2-8t+2$, entonces $g'(t)=6t-8$

b) Si $f(x)=\frac{3}{2}x^2-5x$, entonces $f'(x)=3x-5$

c) Si $y=-\frac{2}{3}x^4+2x^3-x$, entonces $y'=-\frac{8}{3}x^3+6x^2-1$

Derivadas de las funciones seno y coseno

Teorema 6 Derivadas de las funciones seno y coseno

$$\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}(x)\right]=\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos(x)\right]=-\operatorname{sen}(x)$$

Esta regla de derivación se muestra gráficamente en la figura 19. Se debe observar que para cada x la pendiente de la curva seno es igual al valor del coseno. La demostración de la regla para derivar la función coseno elabórala como ejercicio.

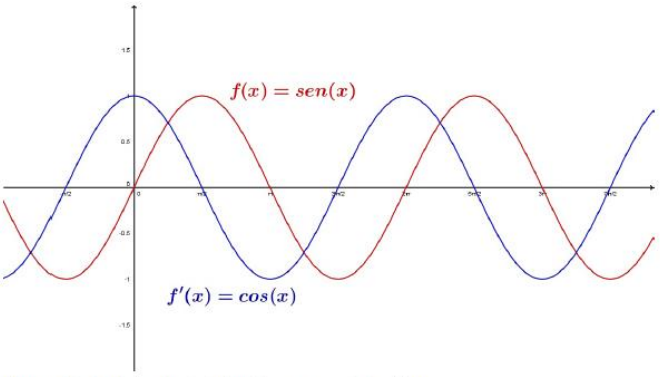


Figura 19 La derivada de la función seno es la función coseno.

Regla del producto de funciones

Teorema 7 Regla del producto

El producto de dos funciones diferenciables f y g es, en sí mismo, diferenciable. Más aún, la derivada de fg es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\,g(x)\right] = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

La regla del producto se extiende para productos que comprendan más de dos factores. Por ejemplo, si f, g y h son funciones diferenciables de x, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)g(x)h(x)\right] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Ejemplos:
Uso de la regla del producto

$$h(t) = \left(-t + t^2\right)(5 - 4t), \text{ entonces}$$

$$h'(t) = \left(-t + t^2\right)\frac{d}{dt}\left[5 - 4t\right] + (5 - 4t)\frac{d}{dt}\left(-t + t^2\right)$$

a) Si $h'(t) = \left(-t + t^2\right)(-4) + (5 - 4t)(-1 + 2t)$

$$h'(t) = \left(4t - 4t^2\right) + \left(-5 + 10t + 4t - 8t^2\right)$$

$$h'(t) = -12t^2 + 18t - 5$$

Ejemplos:
Uso de la regla del producto

b) Si $f(x) = x\ \text{sen}(x)$, entonces

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] + \text{sen}(x)\frac{d}{dx}[x]$$
$$f'(x) = x\cos(x) + \text{sen}(x)(1)$$
$$f'(x) = x\cos(x) + \text{sen}(x)$$

c) Si $y = 5x\ \cos(x) - 5\ \text{sen}(x)$, entonces

$$y'(x) = 5x\frac{d}{dx}[\cos(x)] + \cos(x)\frac{d}{dx}[5x] - 5\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)]$$
$$y'(x) = 5x(-\text{sen}(x)) + \cos(x)(5) - 5\cos(x)$$
$$y'(x) = -5x(\text{sen}x)$$

Regla del cociente de funciones

Teorema 8 Regla del cociente

El cociente de $\frac{f}{g}$ de dos funciones diferenciables f y g es, en si mismo diferenciable para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Más aún, la derivada de $\frac{f}{g}$ se expresa por el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplo:
Uso de la regla del cociente

Si $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x+1}$, entonces

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\frac{d}{dx}(3x^2)-(3x^2)\frac{d}{dx}(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(6x)-(3x^2)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{12x^2+6x-6x^2}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^2+6x}{(2x+1)^2}$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

A partir del teorema 6, es decir, del conocer las derivadas de las funciones seno y coseno, es posible determinar las derivadas de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

Teorema 9 Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\left[\tan(x)\right]=\sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cot(x)\right]=-\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sec(x)\right]=\sec(x)\tan(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\csc(x)\right]=-\csc(x)\cot(x)$$

Regla de la cadena o derivada de una función compuesta

Básicamente la regla de la cadena expresa que si la función y cambia $\dfrac{du}{dx}$ veces tan rápido como u, y dicha función u cambia $\dfrac{du}{dx}$ veces tan rápido como x, entonces la función y cambia veces tan rápido como x.



Revisa más de este tema en:

Regla de la cadena es un tema que aplicarás en el **Módulo 20** página 113.

Teorema 10 Regla de la cadena

Si $y=f(u)$ es una función diferenciable de u y $u=g(x)$ es una función diferenciable en x, entonces $y=f(g(x))$ es una función diferenciable de x y $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

O de forma equivalente:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[f(g(x))\right]=f'(g(x))g'(x)$$

Cuando se aplica la regla de la cadena es útil pensar que la función compuesta $f\circ g$ tiene dos partes: una interior y otra exterior: $y=f(g(x))=f(u)$, donde $u=g(x)$ es la función interior, mientras que la función f es la exterior. Así, la derivada de $y=f(u)$ es la derivada de la función exterior (en la función interior u) multiplicada por la derivada de la función interior: $y'=f'(u)u'$

Un caso especial de la regla de la cadena se conoce como la regla general de la potencia y se enuncia a continuación:

Si $y=\left[u(x)\right]^n$, donde u es una función diferenciable de x y n es un número racional, entonces: $\frac{dy}{dx}=n\left[u(x)\right]^{n-1}\frac{du}{dx}$, o de forma equivalente, $\frac{d}{dx}\left[u^n\right]=nu^{n-1}u'$

Resumen de las principales reglas de derivación

Sean u y v dos funciones diferenciables con respecto a x, y k una constante.

1	$\frac{d}{dx}[k]=0$	2	$\frac{d}{dx}[x]=1$
3	$\frac{d}{dx}[k\cdot u]=k\cdot u'$	4	$\frac{d}{dx}[u\pm v]=u'\pm v'$
5	$\frac{d}{dx}[u\cdot v]=u\cdot v'+v\cdot u'$	6	$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right]=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{v^2}$
7	$\frac{d}{dx}[u\circ v]=\frac{d}{dx}[u(v)]=u'(v)\cdot v'$	8	$\frac{d}{dx}[u^k]=ku^{k-1}\cdot u'$
9	$\frac{d}{dx}[\lvert u\rvert]=\frac{u}{\lvert u\rvert}(u'),\qquad u\neq 0$	10	$\frac{d}{dx}[k^u]=k^u\ln k\cdot u'$
11	$\frac{d}{dx}[u^v]=v\,u^{v-1}\cdot u'+u^v\ln u\cdot v'$	12	$\frac{d}{dx}[log_k\,u]=\frac{u'}{u\cdot\ln k}$
13	$\frac{d}{dx}[ln\,u]=\frac{u'}{u}$	14	$\frac{d}{dx}[e^u]=e^u\cdot u'$

15	$\frac{d}{dx}[sen\ u] = (\cos u)\cdot u'$	16	$\frac{d}{dx}[cos\ u] = -(\text{sen}\ u)\cdot u'$
17	$\frac{d}{dx}[tan\ u] = (\sec^2 u)\cdot u'$	18	$\frac{d}{dx}[cot\ u] = -(\csc^2 u)\cdot u'$
19	$\frac{d}{dx}[sec\ u] = (\sec \text{u} \tan \text{u})\cdot u'$	20	$\frac{d}{dx}[csc\ u] = -(\csc \text{u} \cot \text{u})\cdot u'$
21	$\frac{d}{dx}[arc\ sen\ u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	22	$\frac{d}{dx}[arc\ cos\ u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
23	$\frac{d}{dx}[arc\ tan\ u] = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	24	$\frac{d}{dx}[arc\ cot\ u] = \frac{-u'}{1+u^2}$
25	$\frac{d}{dx}[arc\ sec\ u] = \frac{u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$	26	$\frac{d}{dx}[arc\ csc\ u] = \frac{-u'}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 10 sobre **funciones** de la página 88 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 204 a 213 del Apéndice 1.

Comportamiento de funciones, puntos críticos, máximos y mínimos

Un aspecto central en el análisis del comportamiento de las funciones tiene que ver con los conceptos de **valores extremos, la concavidad, sus puntos críticos y si la función es creciente o decreciente**.

En el estudio de las parábolas por ejemplo la concavidad se localiza a partir del vértice, determinando si dicha parábola abre hacia abajo, hacia arriba, hacia la derecha o hacia la izquierda.

En cualquiera de estos casos las pendientes de las rectas tangentes, es decir la derivada evaluada en el vértice es igual a cero y nos indican un cambio de comportamiento cualitativo y cuantitativo en la trayectoria descrita por la representación gráfica de la función.

Problemas referentes al comportamiento de funciones y el uso de la derivada

¡Atención! Revisa los ejemplos que se encuentran ubicados en las páginas 91 a 95 del libro de texto.

Definición de conceptos referentes al comportamiento de funciones y uso de la derivada

En el cálculo se dedica mucho esfuerzo a la determinación del comportamiento de funciones en un cierto intervalo, esto debido a la implicación de los resultados al tratar problemas.

Definición de extremos

Sea f una función definida en un intervalo cerrado I que contiene al punto c.

1. $f(c)$ es el *mínimo* de f sobre I si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en I.
2. $f(c)$ es el *máximo* de f sobre I si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en I.

El mínimo y el máximo de una función sobre un intervalo son los *valores extremos*, o simplemente *extremos*, de la función sobre dicho intervalo. El mínimo y máximo de una función sobre un intervalo también se conocen como *mínimo absoluto* o *máximo absoluto* sobre el intervalo.

Una función no tiene, por necesidad, mínimo o máximo sobre un intervalo. De hecho la continuidad (o la falta de ella) puede influir en la existencia de un extremo sobre el intervalo. Esto sugiere el siguiente teorema.

Teorema 11 Valores extremos

Si f es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo sobre el intervalo.

Ahora bien, en un intervalo puede suceder que determinada función tenga más de un valor mínimo o máximo, dando cabida al concepto de mínimo relativo y máximo relativo. De manera informal, se puede pensar en un mínimo relativo como si se presentara un "valle" en la gráfica de la función, y un máximo relativo como si en ella ocurriera una "colina". Ese valle y esa colina pueden asumir dos formas distintas. Si el valle (o colina) es suave y redondeado (o redondeada), la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto más alto (o más bajo). Si el valle (o la colina) es brusco (o brusca) y forma un pico, la gráfica presenta una función que no es diferenciable en el punto más alto (o en el punto más bajo). El ejemplo gráfico se muestra en la figura 24.

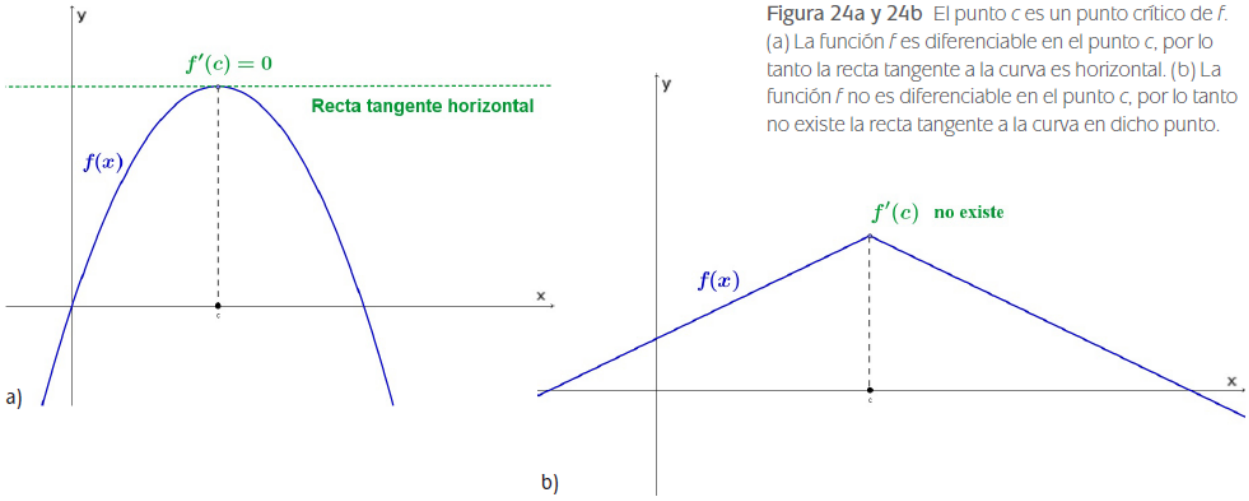


Figura 24a y 24b El punto *c* es un punto crítico de *f*. (a) La función *f* es diferenciable en el punto *c*, por lo tanto la recta tangente a la curva es horizontal. (b) La función *f* no es diferenciable en el punto *c*, por lo tanto no existe la recta tangente a la curva en dicho punto.

Definición de extremos relativos

1. Si existe un intervalo abierto que contiene al punto *c* sobre el que $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ se conoce como *máximo relativo* de f.

2. Si existe un intervalo abierto que contiene al punto *c* sobre el que $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ se conoce como *mínimo relativo* de f.

En los extremos relativos definidos anteriormente, la derivada de la función es cero o puede estar no definida. Los valores de x en estos puntos especiales reciben el nombre de **puntos críticos**. En la figura 24 se ilustran con color verde los dos tipos de puntos críticos de una función.

Definición de punto crítico

Sea f una función definida en el punto c. Si $f'(c)=0$ o si f' no está definida en c, entonces c es un punto crítico de f.

Teorema 12 Los extremos relativos ocurren en los puntos críticos

Si f es una función que tiene un mínimo relativo o un máximo relativo en $x=c$. Entonces c es un punto crítico de f.

Para poder clasificar los extremos relativos como mínimos o máximos relativos a partir del uso de la derivada de una función se requiere definir funciones crecientes y decrecientes.

Definición de funciones crecientes y decrecientes

Una función f es *creciente* sobre un intervalo si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.

Una función f es *decreciente* sobre un intervalo si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.

Cuando una derivada es positiva implica que la función es creciente, si una derivada es negativa implica que la función es decreciente, y si una derivada es igual a cero sobre un intervalo completo implica que la función es constante sobre dicho intervalo.

Teorema 13 Prueba para las funciones crecientes y decrecientes

Sea f una función continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable sobre el intervalo abierto (a,b), entonces:

1. Si $f'(x)>0$ para todo x en (a,b), entonces f es creciente sobre $[a,b]$.
2. Si $f'(x)<0$ para todo x en (a,b), entonces f es decreciente sobre $[a,b]$.
3. Si $f'(x)=0$ para todo x en (a,b), entonces f es constante sobre $[a,b]$.

Toda vez que se han determinado los intervalos sobre los que una función es creciente o decreciente, se enuncia el siguiente resultado que permite localizar los extremos relativos de una función a partir del uso de la primera derivada.

Teorema 14 Prueba de la primera derivada

Sea c un punto crítico de una función f que es continua sobre un intervalo abierto I que contiene al punto c. Si f es diferenciable sobre el intervalo, excepto quizá en el punto c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue:

1. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.
2. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.
3. Si $f'(x)$ no cambia de signo en c, entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.



Revisa más de este tema en:

Máximos y mínimos es un tema que aplicarás en el **Módulo 20** página 76.

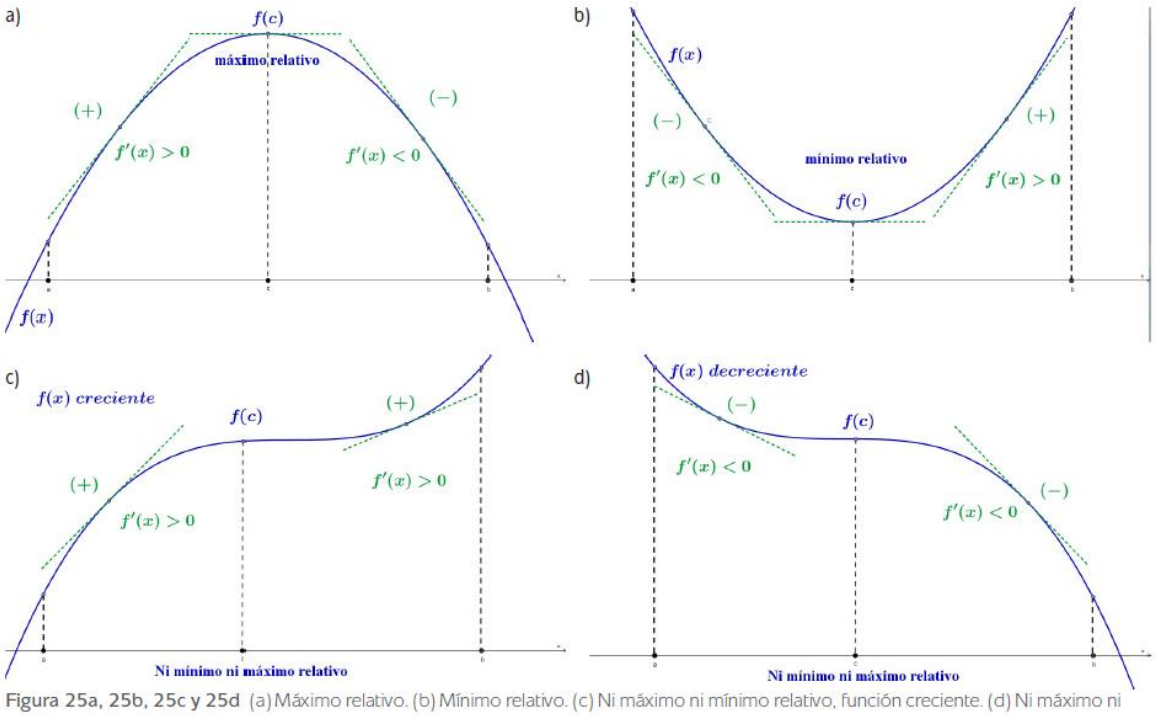


Figura 25a, 25b, 25c y 25d (a) Máximo relativo. (b) Mínimo relativo. (c) Ni máximo ni mínimo relativo, función creciente. (d) Ni máximo ni mínimo relativo, función decreciente.

La localización de los intervalos en los que una función crece o decrece contribuye a la descripción de la gráfica de la función. A continuación se muestra cómo puede usarse la localización de los intervalos en los que la derivada f ' crece y decrece para determinar dónde la gráfica está curvada hacia arriba o hacia abajo.

Definición de concavidad

Sea f una función diferenciable sobre un intervalo abierto I. La gráfica de f es cóncava hacia arriba (convexa) sobre I, si f ' es creciente sobre el intervalo, y es cóncava hacia abajo sobre I, si f ' es decreciente sobre el intervalo.

El siguiente resultado indica cómo usar la segunda derivada de una función para determinar intervalos sobre los que la gráfica de la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Teorema 15 Prueba de la concavidad

Sea f una función cuya segunda derivada existe sobre un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba (convexa) en I.
2. Si $f''(x) < 0$ par todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

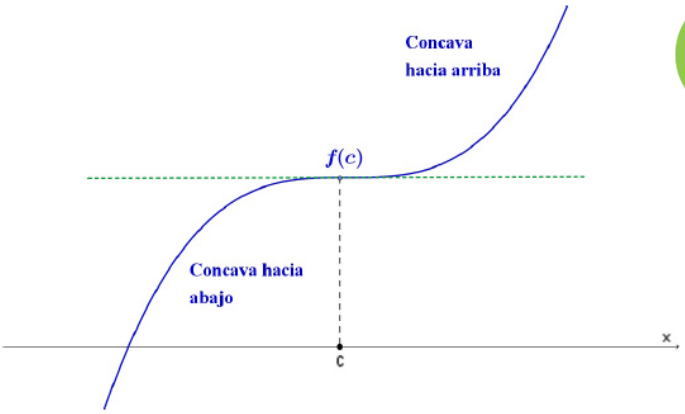


Figura 26 La concavidad de la función *f* cambia en un punto de inflexión.

Revisa más de este tema en:

Puntos de Inflexión es un tema que aplicarás en el **Módulo 20** página 77.

En la figura 26 se ilustran los tipos de concavidad en la función y la existencia de puntos (tres tipos) en los que la concavidad cambia. Si la recta tangente a la gráfica existe en un punto de este tipo, dicho punto recibe el nombre de **punto de inflexión**.

Además de permitir realizar las pruebas en relación con la concavidad de la función, la segunda derivada puede usarse para realizar una prueba sencilla respecto a los máximos y mínimos relativos.

Teorema 16 Puntos de inflexión

Si $(c, f(c))$,es un punto de inflexión de la gráfica de f , entonces $f''(c)=0$ o bien f'' no está definida en $x=c$.

Teorema 17 Prueba de la segunda derivada

Sea f una función tal que $f'(c)=0$ y la segunda derivada de f existe sobre un intervalo abierto que contiene al punto c , entonces:

1. Si $f''(c)>0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.
2. Si $f''(c)<0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.
3. Si $f''(c)=0$, entonces la prueba falla. En esos casos, es posible aplicar la prueba de la primera derivada (ver Teorema 14).

Problemas de optimización y aplicaciones de la derivada

Revisa más de este tema en:

Segunda derivada es un tema que aplicarás en el **Módulo 20** página 78.

Considera la frecuencia con la que escuchas o lees términos como utilidad máxima, costo mínimo, tiempo mínimo, voltaje máximo, tamaño óptimo o máximo, resistencia máxima y distancia máxima. Estos problemas se llaman, en general, **problemas de optimización**. Una de las aplicaciones más comunes del cálculo incluye la determinación de valores máximos y mínimos de una función, y más aún, conocer para qué valores de la variable independiente se obtienen tales valores. En términos generales un problema de optimización consiste en encontrar el valor mínimo, o minimizar, o encontrar el valor máximo, o maximizar, una cierta función de tal forma que satisfaga ciertas condiciones dadas. La solución o soluciones óptimas son aquellas para las cuales se satisfacen las restricciones del problema y el valor de la función sea mínimo o máximo.

A continuación se describe una estrategia general de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas de optimización

1. Identificación de variables. Asignar símbolos a todas las cantidades dadas y a las que se van a determinar. Cuando sea factible, realizar un esquema.
2. Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico. Escribir una ***ecuación primaria*** para la cantidad que se desea maximizar (o minimizar).
3. Reducir la ecuación primaria a una que sólo dependa de una variable. Esto puede comprender el uso de ***ecuaciones secundarias*** obtenidas a partir de los datos del problema que relacionen las variables independientes de la ecuación primaria.
4. Determinar el dominio de la ecuación primaria. Es decir, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido.
5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado por medio de las técnicas del cálculo explicadas con anterioridad.

Nota: al llevar a cabo el paso 5 hay que recordar que para determinar el valor máximo, o el mínimo, de una función f continua sobre un intervalo cerrado, se deben de comparar los valores de f en sus puntos críticos con los que tenga en los puntos extremos del intervalo.

¡Atención! Revisa los ejemplos que se encuentran ubicados en las páginas 102 a 106, es de gran importancia lo hagas pues son casos prácticos en los que aplicamos los conceptos, reglas y teoremas.

ACTIVIDAD:

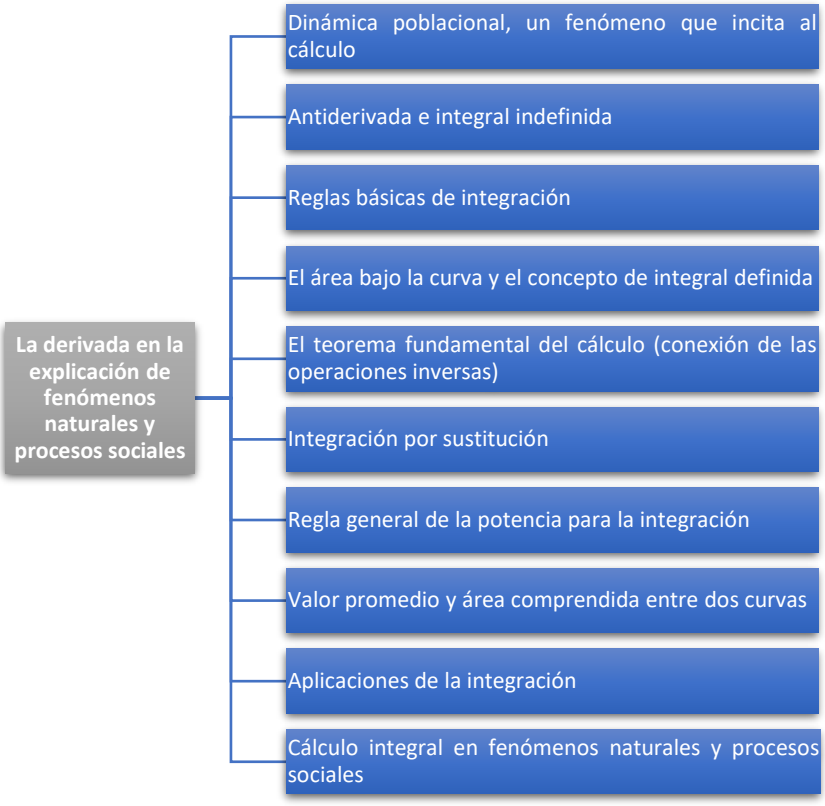
- ✓ Realiza la actividad 11 sobre la aplicación del **cálculo diferencial** de la página 108 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 213 a 216 del Apéndice 1.

UNIDAD 2 LA DERIVADA EN LA EXPLICACIÓN DE FENÓMENOS NATURALES Y PROCESOS SOCIALES.

¿Qué voy a aprender y cómo?
En la anterior unidad se abordaron fundamentalmente tres de los cuatro problemas que propiciaron el surgimiento histórico del **cálculo diferencial e integral**. En esta unidad, si bien se seguirán analizando dichos problemas, se estudiará con especial énfasis el cuarto y último problema, mismo que a su vez tiene dos variantes. La primera variante consiste en la obtención de **áreas de figuras con frontera curva**, y la segunda es la determinación de la **distancia recorrida por un móvil con una velocidad no uniforme.** La resolución de las dos problemáticas anteriores hizo posible el inicio del **cálculo integral.**

¿Con qué propósito?
El propósito de esta unidad se centra en explicar en forma objetiva, integral y precisa el comportamiento de **fenómenos naturales y procesos sociales** propios de tu entorno, por medio de la aplicación de la **derivada, la diferencial, la antiderivada y el teorema fundamental del cálculo**, para realizar predicciones de éstos en tiempos definidos e identificar su impacto en el entorno.

¿Qué saberes trabajaré?
En esta unidad se analizarán conceptos como **la diferencial y la antiderivada**, mismos que constituyen el preámbulo para el concepto más importante de todo el cálculo: el **teorema fundamental.** Asimismo, la derivada se utilizará como herramienta para explicar fenómenos naturales y procesos sociales cuantificables.



El cálculo se compone de dos partes principales, el **cálculo diferencial y el integral**; el cálculo diferencial se basa en la operación de **derivación** de una función. En esta unidad se define la

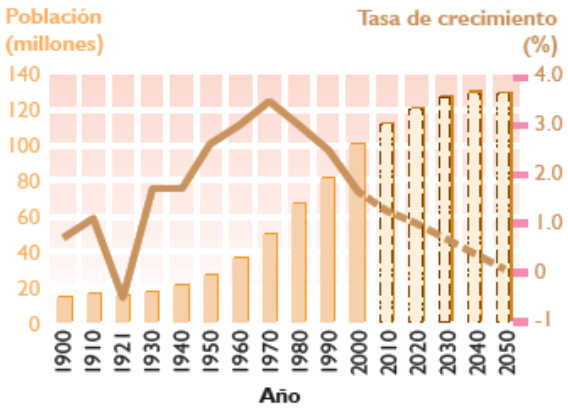
operación de **integración** como la inversa de la diferenciación y los conceptos básicos a tratar de cálculo integral son la **antiderivada** de una función y la **integral definida**. El puente entre estas dos operaciones inversas y fundamentales del cálculo es el **teorema fundamental del cálculo**.

Dinámica poblacional, un fenómeno que incita al cálculo

Las características de la vida en las sociedades humanas del pasado y presente siglo no pueden preverse sin tener en cuenta los constantes cambios que acontecen en el desarrollo general de la sociedad, los cuales, debido a la globalización, imprimen destacadas particularidades a la dinámica de la población en el entorno social.

El Fondo de Población de las Naciones Unidas (**FPNU**; en inglés United Nations Population Fund: UNFPA), han expresado su preocupación por la fuerte incidencia del crecimiento poblacional en lo que tiene que ver con las emisiones de gases de efecto invernadero y su alto impacto en el cambio climático, puesto que diversas proyecciones resultantes del estudio y tratado de la dinámica de poblaciones a partir de modelos matemáticos establecen un incremento de entre mil y cuatro mil millones de habitantes en el mundo para el año 2050. Sin duda la mayor incidencia estará en las grandes ciudades, a donde acuden corrientes migratorias en busca de mayores oportunidades laborales, de educación y de condiciones de vida. De esta forma el crecimiento de las ciudades y la urbanización del mundo constituyen unos de los hechos más importantes de los tiempos modernos; el predominio de las ciudades puede considerarse consecuencia de la concentración de actividades y servicios.

En el siglo pasado México cambió de ser un país rural a uno donde la mayor parte de la población vive en localidades urbanas (mayores a 2 mil 500 habitantes). La migración del campo a las ciudades, y más recientemente el intenso movimiento de personas entre ciudades son dos de las fuerzas que definen el patrón de distribución actual de la población en México. Hablamos de una población que ha sufrido una profunda transformación demográfica. En 1900 había poco más de 13 millones de habitantes en nuestro territorio nacional, para el 2000 casi se alcanzaron los 100 millones y de acuerdo con los resultados del II Conteo de Población y Vivienda 2005, realizado por Instituto Nacional de Estadística y Geografía(INEGI), la población mexicana en el 2005 era de 103.3 millones de habitantes. A pesar de la reducción en la tasa de crecimiento, el incremento neto de la población en el periodo 2000-2005 fue de casi 5.8 millones de personas, es decir, se tuvo un crecimiento del 1% anual. Según las proyecciones que se muestran en el gráfico 1 y elaboradas por el Consejo Nacional de Población (CONAPO), la población seguirá creciendo hasta alcanzar cerca de 130 millones en el año 2040, para posteriormente iniciar lentamente su descenso.



Población y tasa de crecimiento total, 1900-2050

Cabe destacar del gráfico anterior que la relación de la población y el crecimiento de la misma en un instante dado matemáticamente se modela a partir de una relación funcional y la respectiva derivada en un tiempo dado. Dicho de otra forma, si $P(t)$ representa el número de individuos de cierto país en el tiempo t (véase la gráfica de barras anterior), entonces el crecimiento instantáneo de la población es precisamente la derivada de la función $P(t)$.

El objetivo de estos modelos matemáticos es explicar o predecir el número de la población en determinado tiempo, la cual se expresa con la función $P(t)$, que cuenta el número de individuos presentes en el instante t. Aunque la función $P(t)$ necesariamente toma valores enteros, cuando el número de individuos es grande se toma como una función de valores reales, continua y varias veces derivable. Los modelos que describen la dinámica poblacional se basan en leyes de crecimiento de la población, mismas que son funciones definidas por la razón de cambio dP/dt de la población por unidad de tiempo.

El modelo exponencial introducido por Thomas Malthus en 1798, supone tasas de nacimientos y muertes (con relación al total de la población) constantes en el tiempo. Es decir, $\frac{dP}{dt} = (r_n - r_m)P = rP$, donde r_n es la tasa (instantánea) de nacimientos (por individuos y por unidad de tiempo) y r_m la tasa de muertes. La resta de ambas es la tasa de crecimiento neto r de la población. Este modelo supone que las tasas son determinadas de alguna manera por los mecanismos de reproducción, crecimiento y muerte de la población, los cuales se mantienen fijos en el tiempo.

El modelo exponencial no puede ser indefinidamente válido, ya que tendría que llegar un momento en que los recursos llegan a su máxima capacidad, limitando la tasa de crecimiento, pero puede ser apropiado en los términos de corto plazo.

En el caso de las poblaciones humanas el crecimiento exponencial se puede sostener por periodos largos si los recursos aumentan a medida que crece la población, mediante el desarrollo tecnológico. Para la solución del modelo exponencial necesitamos construir la herramienta matemática y propia del cálculo que determine la población $P(t)$ a partir de la razón instantánea de cambio, $\frac{dP}{dt}$ es decir, hablamos del proceso inverso, determinar la función cuya derivada sea el crecimiento instantáneo de la población.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 1 sobre el **cálculo en la dinámica poblacional** de la página 115 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 217 y 218 del Apéndice 1.

Antiderivada e integral indefinida

Al igual que en el caso de la derivada, el concepto de la integral se puede deducir de la necesidad de encontrar respuestas a fenómenos vinculados con el movimiento de los cuerpos. Hablamos de la operación inversa de la derivación, a la cual llamaremos **integración o antiderivación**.

Antiderivadas

Definición de antiderivada

En general, una función G es una *antiderivada* de f sobre un intervalo I, si $G'(x) = f(x)$ para toda x en el intervalo I.

Teorema 1 Antiderivada general

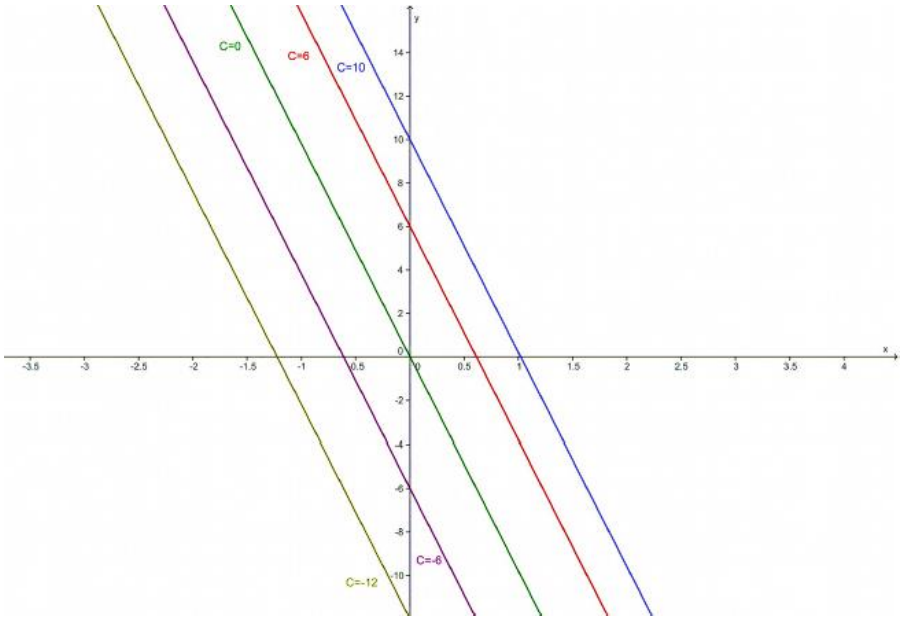
Si la función F es una **antiderivada** de f sobre un intervalo I, entonces G representa toda la familia de antiderivadas de f sobre el intervalo I si y sólo si la función G tiene la forma: $G(x)=F(x)+C$, para toda x en el intervalo I y donde C es una constante arbitraria.

A partir del teorema anterior es posible representar toda la familia de antiderivadas de una función sumando una constante arbitraria a una antiderivada conocida. La constante C se llama **constante de integración**. La familia de funciones representada por G es la llamada antiderivada general de f.

Ejemplo:
Resolución de una ecuación diferencial
Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $y'=-9.8$
Solución:
En principio, se debe encontrar una función cuya derivada sea -9.8. La función $-9.8x$ es una de tales funciones; en otras palabras, es una antiderivada de -9.8.
A partir del teorema 1 de esta unidad, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y=-9.8x+C$$

En la siguiente figura se muestran las gráficas de varias antiderivadas de $y'=-9.8$ (funciones de la forma $y=-9.8x+C$



Notación para las antiderivadas

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ es útil escribirla en su forma diferencial equivalente: $dy = f(x)dx$.

La operación de encontrar todas las soluciones de esta ecuación se llama **antiderivación (o integral indefinida)** y se indica con el **signo de integral**, $\int$. La solución general se denota por:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $f(x)$ es llamado **integrando**. La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la antiderivada de f con respecto a x. Por consiguiente, la diferencial dx sirve para identificar a x como la variable de integración. El concepto de **integral indefinida es sinónimo de antiderivada**.

Nota: en esta unidad siempre que se escribe $y = \int f(x)dx = F(x) + C$, significa que F es una antiderivada de f sobre un intervalo.

Ejemplo:
Resolución de un problema de movimiento de un proyectil en caída libre
Si se lanza verticalmente una pelota hacia arriba despreciando la resistencia del aire, con una velocidad inicial de 49 metros por segundo desde una altura inicial de 10 metros, como se muestra en la figura 6, entonces el problema es:

a) Determinar la función distancia, $d(t)$, que describe el movimiento de dicho proyectil en función del tiempo.

b) Encontrar la altura máxima que alcanza la pelota sobre el nivel del suelo y en qué tiempo sucede esto.

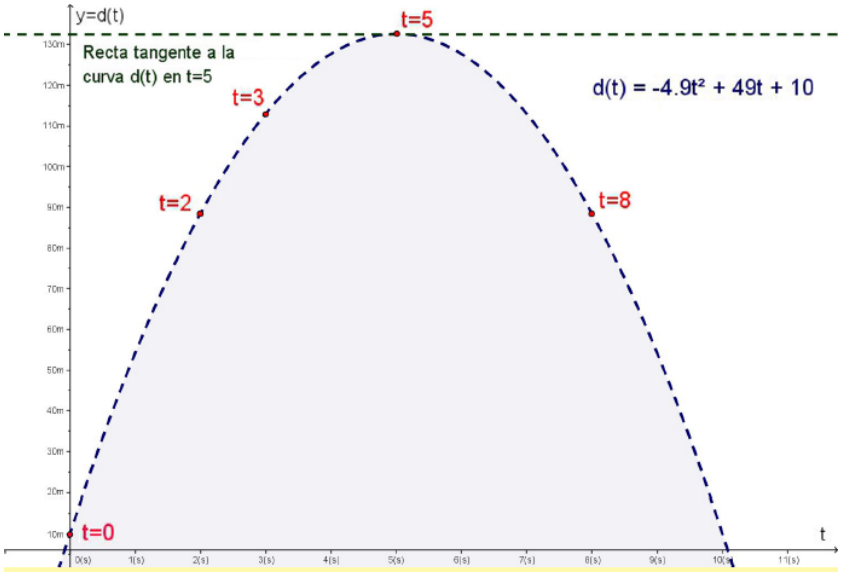


Figura 6 Gráfica de la función distancia, $d(t)$, que describe la posición de la pelota en el instante t. La recta tangente es horizontal (pendiente cero) justo cuando la pelota alcanza la máxima altura sobre el nivel del suelo, es decir, la derivada en el valor máximo es igual a cero (vértice de la parábola).

Continuación…

Solución

a) Sea $t=0$, el tiempo inicial del fenómeno observado. Si la función $d(t)$ representa la posición de la pelota en el instante t, entonces, ¿cómo se pueden expresar las dos condiciones iniciales dadas?

$d(0)=10$. La altura inicial es 10 metros.

$d'(0)=49$, La velocidad inicial (derivada) es 49 metros por segundo.

Ahora bien, la aceleración debida a la gravedad es $9.8\ m/s^2$ y puesto que la derivada de la velocidad es precisamente la aceleración, se tiene $d''(t)=-9.8$, Implicando que $d'(t)=\int d''(t)dt=\int -9.8dt=-9.8t+C_1$,de donde al utilizar la velocidad inicial se obtiene: $d'(0)=49=-9.8(0)+C_1$ implicando que $C_1=49$, por lo que $d'(t)=-9.8t+49$

Ahora bien, se obtiene al integrar:
$d(t)=\int d'(t)dt=\int(-9.8t+49)dt=-4.9t^2+49t+C_2$, de donde al utilizar la altura inicial, se tiene: $d(0)=10=-4.9(0)^2+49(0)+C_2$, lo que significa que $C_2=10$. Por lo tanto la función distancia que describe la posición de la pelota en todo instante t está dada por: $d(t)=-4.9t^2+49t+10$

b) Para determinar la altura máxima que alcanza la pelota sobre el nivel del suelo hacemos uso del concepto de la derivada de la función distancia, $d'(t)$, ya que justo en ese momento la pelota comienza a descender con velocidad instantánea igual a cero, es decir: $d'(t)=-9.8t+49=0$, que representa geométricamente una recta tangente a la curva $d(t)$ con pendiente cero.

El tiempo en el que la pelota alcanza su altura máxima es: $t=\dfrac{-49}{-9.8}=5$ segundos

Al sustituir el valor en la función distancia se tiene que:
$d(5)=-4.9(5)^2+49(5)+10=132.5$ metros es la altura máxima que la pelota alcanza sobre el nivel del suelo.

Nota: se debe observar que la función distancia del ejemplo anterior tiene la forma: $d(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+d_0$, donde $g=-9.8\ m/s^2$, la velocidad inicial es $v_0=49\ m/s$ y la altura o distancia inicial es $d_0=10\ m$.

Reglas básicas de integración

La naturaleza inversa de la integración y la derivación puede comprobarse sustituyendo $F'(x)$ por $f(x)$ en la definición de integral indefinida, $\int f(x)dx = F(x)+C$, para obtener: $\int F'(x)dx = F(x)+C$, es decir, la integración es la inversa de la derivación. Además si $\int f(x)dx = F(x)+C$, entonces: $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$, es decir, la derivación es la inversa de la integración.

Revisa más de este tema en:
Reglas de integración es un tema que aplicarás en el **Módulo 20** página 79.

Estas dos ecuaciones permiten obtener las fórmulas de integración directamente de la derivación.

Ejemplo:
Aplicación de las fórmulas de integración
Escribir las antiderivadas de 4x.

Solución

Por la regla de la constante múltiple: $\int 4xdx = 4\int xdx$

Al volver a escribir con $x = x^1 = 4\int x^1 dx$

Por la regla de la potencia $(n-1), = 4\left(\frac{x^2}{2}\right)+C$

Simplificando obtenemos: $2x^2 + C$

A través de este ejemplo se observa que el patrón general de integración es similar al de la derivación.

Integral original → Volver a escribirla → Integrar → Simplificar

Sean f y g dos funciones con respecto a x, mientras que k, n y C son constantes.

	Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración
1	$\frac{d}{dx}[k] = 0$	$\int 0\ dx = C$
2	$\frac{d}{dx}[x] = 1$	$\int k\ dx = kx + C$
3	$\frac{d}{dx}[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$	$\int k f(x)\ dx = k\int f(x)\ dx$
4	$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)$
5	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
6	$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
7	$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x\ dx = e^x + C$
8	$\frac{d}{dx}[sen\ x] = \cos x$	$\int \cos x\ dx = sen\ x + C$
9	$\frac{d}{dx}[cos\ x] = -\text{sen}\ x$	$\int \text{sen}\ x\ dx = -cos\ x + C$
10	$\frac{d}{dx}[tan\ x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\ dx = tan\ x + C$

11	$\frac{d}{dx}[sec\ x] = \sec x \tan x$	$\int (\sec x \tan x)\, dx = sec\ x + C$
12	$\frac{d}{dx}[csc\ x] = -\csc x \cot x$	$\int (\csc x \cot x)\, dx = -csc\ x + C$
13	$\frac{d}{dx}[cot\ x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -cot\ x + C$
14	$\frac{d}{dx}[arc\ sen\ x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ sen\ x + C$
15	$\frac{d}{dx}[arc\ tan\ x] = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = arc\ tan\ x + C$
16	$\frac{d}{dx}[arc\ sec\ x] = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}} = arc\ sec\ \lvert x\rvert + C$

Tabla 1 La primera columna permite obtener derivadas de funciones mientras que la segunda determina la antiderivada general o integral indefinida. Se debe observar que la regla de la potencia para la integración tiene la restricción de que $n \neq -1$.

Las reglas básicas de integración listadas en la tabla 1 de esta sección permiten integrar cualquier función polinomial, como se muestra a continuación.

Ejemplos:
Integración de funciones polinomiales

a) $\int dx = \int 1dx = x + C$

b) $\int (3x-5)\,dx = 3\int xdx - 5\int dx = \frac{3x^2}{2} + C_1 - 5x + C_2 = \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$

c)
$$\int \left(-4x^5 + 2x^3 - x\right) dx = -4\int x^5 dx + 2\int x^3 dx - \int xdx$$
$$= -\frac{4}{6}x^6 + \frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C = -\frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

Volver a escribir antes de integrar

$$\int \left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{1/2} + 2x^{-1/2}\right) dx$$

a)
$$= \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + 4x^{1/2} + C$$

Nota: cuando se integran cocientes no se debe integrar por separado el numerador y denominador, esto no es válido en la integración y diferenciación.

$$\int \left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right) dx \neq \frac{\int (x+2)\,dx}{\int \sqrt{x} dx}$$

b) $\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right) dx = \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 4 sobre **derivadas** de la página 126 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 219 a 224 del Apéndice 1.

El área bajo la curva y el concepto de integral definida



Figura 7 Área del rectángulo $a = (BC)(CD)$.

En la geometría euclidiana el rectángulo es una figura a la que se le puede encontrar el área sin tantas complicaciones. Donde la definición del área de un rectángulo es $a = bh$ (base por altura), como se muestra en la figura 7.

A partir de esta definición es posible obtener el área de cualquier región en el plano cuya frontera esté comprendida por líneas rectas. Por ejemplo, el área de un triángulo puede formar un rectángulo cuya área es el doble de la del triángulo. Una vez que se conoce la forma de encontrar el área de un triángulo, se puede determinar el área de cualquier polígono subdividiéndolo en regiones triangulares, como se muestra en la figura 8.

No obstante, el calcular el área de una figura plana cuya frontera no esté formada por segmentos rectos, un círculo por ejemplo, representa un problema más complicado.

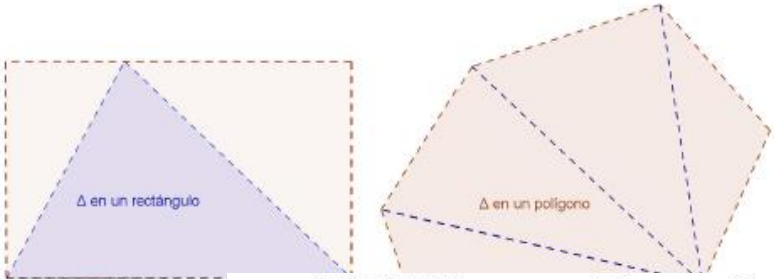


Figura 8 Triángulo en un rectár

Por ejemplo, en la figura 9 se obtiene una aproximación del área de una región circular mediante un polígono inscrito de n lados y un polígono circunscrito también de n lados. Para cada valor de n el área del polígono circunscrito es mayor que el área del círculo. Además, a medida que n se incrementa, el área de ambos polígonos produce cada vez una mejor aproximación del área del círculo.

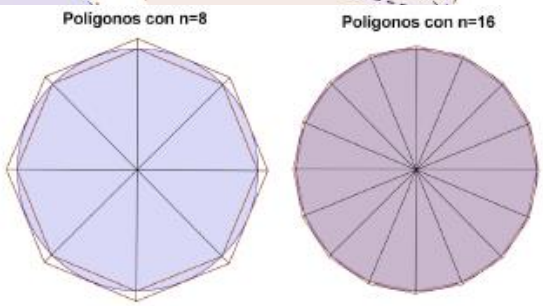


Figura 9 Método de agotamiento para determinar el área de una región circular.

Descubrimiento del número pi

El método de agotamiento consiste en aproximar el área del círculo por áreas de polígonos regulares inscritos y circunscritos, en los cuales la aproximación no es buena si el número de lados es pequeño; pero si consideramos polígonos con un número cada vez mayor de lados, las áreas de éstos se aproximarán cada vez más al área del círculo.

Cuando el número de lados n tiende a infinito, cada vez se aproximará más hasta casi ser idéntica a la del círculo, mientras mayor número de lados tenga, lo estás haciendo muy bien.

Ya que es fácil determinar una fórmula para el área de un polígono regular de n lados, podemos obtener el área del círculo al encontrar el límite de la fórmula cuando n tiende a infinito.

Usemos el símbolo $P(n)$ para denotar el área de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r. Para obtener una fórmula para $P(n)$ podemos usar el hecho de que cualquier polígono regular de n lados puede ser cortado en triángulos congruentes y así obtenemos el área del polígono como la suma de las áreas de los triángulos. Cada uno de estos triángulos es isósceles, ya que dos de sus lados son radios del círculo.

El **área de cada triángulo** puede calcularse al multiplicar un medio de su base por su altura; determinaremos esas dos dimensiones por medio de la trigonometría.

Para obtener el **ángulo** formado por dos lados iguales de cada triángulo se obtiene dividiendo 360° en n partes iguales, es decir, $\theta = \dfrac{360°}{n}$

La base de estos triángulos está dada por: $a = 2r\,\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, debido a que la función **seno** se escribe como $\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{a}{2r}$.

Dado que la función coseno se escribe $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{b}{r}$ entonces la altura de cada uno de los triángulos está dada por: $b = r\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

La fórmula para el área de cada triángulo inscrito en el polígono regular de n lados:

$$\frac{ab}{2} = \frac{2r^2\,\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2} = r^2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Al utilizar la conocida identidad trigonométrica, $\text{sen}(\theta) = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Entonces la fórmula con la que obtenemos el área de cada triángulo es: $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{r^2\,\text{sen}\,\theta}{2}$

Por lo tanto, el área total de nuestro polígono regular de n lados, compuesto de n triángulos isósceles e inscrito en el círculo de radio r está dada por la fórmula:

$$P(n) = \frac{nr^2\,\text{sen}\left(\dfrac{360°}{n}\right)}{2}$$

De manera completamente análoga, podemos aproximarnos al área del círculo utilizando polígonos regulares circunscritos (véase la figura 11).

Si $Q(n)$ es el área del polígono de n lados circunscrito al círculo, podemos encontrar con un desarrollo matemático similar al anterior que: $Q(n) = nr^2 \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$

En la tabla siguiente se muestran las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos para algunos valores particulares de n y radio r.

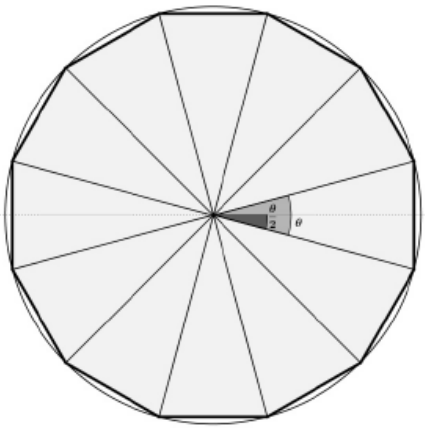


Figura 11 Cálculo del área de los triángulos isósceles inscritos en todo polígono regular de n lados, aquí $n = 12$.

$P(n)$	n	$Q(n)$
$2r^2$	4	$4r^2$
$2.8284\,r^2$	8	$3.3137\,r^2$
$3.0614\,r^2$	16	$3.1826\,r^2$
$3.1214\,r^2$	32	$3.1517\,r^2$
$3.1363\,r^2$	64	$3.1441\,r^2$
$3.1405\,r^2$	128	$3.1422\,r^2$
$3.1401\,r^2$	256	$3.1418\,r^2$
$3.14157\,r^2$	1000	$3.1416029\,r^2$
$3.141592447\,r^2$	10000	$3.141592757\,r^2$

Sabemos que el área del círculo es $A = \pi r^2$, por lo que este método nos permite encontrar las cifras decimales que deseemos del número π (pi).

El concepto de integral definida a partir del área bajo la curva

Vamos a considerar el problema de encontrar el área de una región determinada A en el plano, delimitada por la recta vertical $x = a$ y $x = b$, el eje x, y acotada superiormente por la gráfica de una función positiva $f(x)$ definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Una región de este tipo se ilustra en la figura 13, donde la curva $y = f(x)$ no es necesariamente una línea recta.

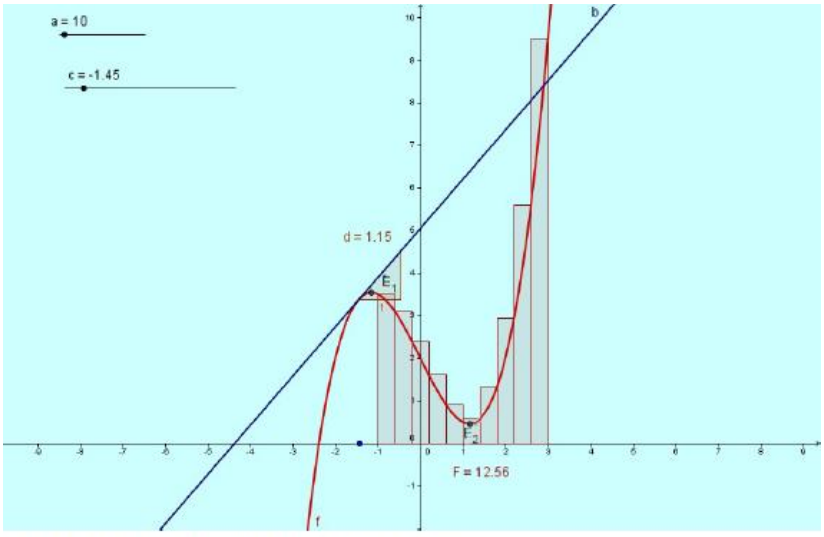


Figura 13 El problema de determinar el área de la región A.

Para resolver este problema se divide la región en subregiones pequeñas a fin de que el valor de su área se pueda aproximar mediante rectángulos u otras figuras geométricas simples (cuyas áreas se sabe cómo calcular). Así es como funciona: primero se realiza la partición, es decir, se divide el intervalo $[a,b]$ en n-subintervalos (partición), de preferencia con la misma anchura Δx.

$$x_o = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad \text{con } x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{para } i = 1,2,3,4,\ldots,n$$

Se debe notar que la partición es:

$$x_o = a,\ x_1 = x_0 + \Delta x,\ x_2 = x_0 + 2\Delta x, \ldots, x_n = x_0 + n\Delta x = x_0 + \frac{n(b-a)}{n} = b$$

Ahora bien, si queremos aproximar el área de la región A por rectángulos, entonces sólo nos tenemos que preocupar por determinar el límite superior (altura) de cada rectángulo (ya que cada subintervalo representa la base de cada rectángulo). La manera más fácil de elegir la altura de cada rectángulo es elegir el valor de la función $f(x)$ en el punto extremo de la izquierda (véase la figura 14) de cada subintervalo, o en el punto extremo derecho (figura 15) de los pequeños intervalos Δx

Debe notarse que en la figura 14, la suma de los n rectángulos se denota con $\underline{S(n)}$ también llamada **suma por la izquierda**, $S(n) = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n$

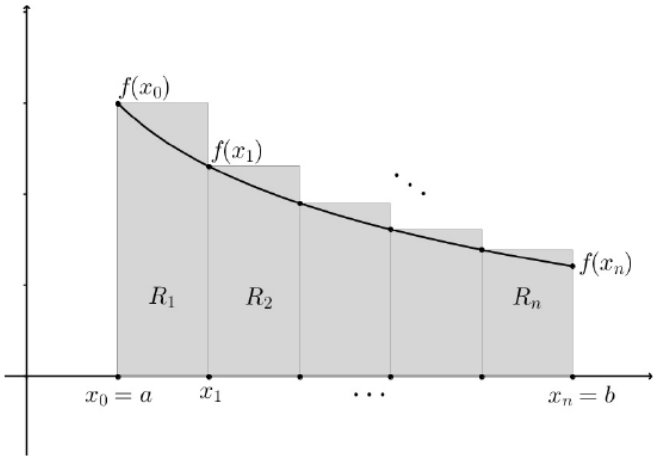


Figura 14 Aproximación de la región *A* usando rectángulos con altura elegida a partir de seleccionar el valor extremo izquierdo de cada Δx.

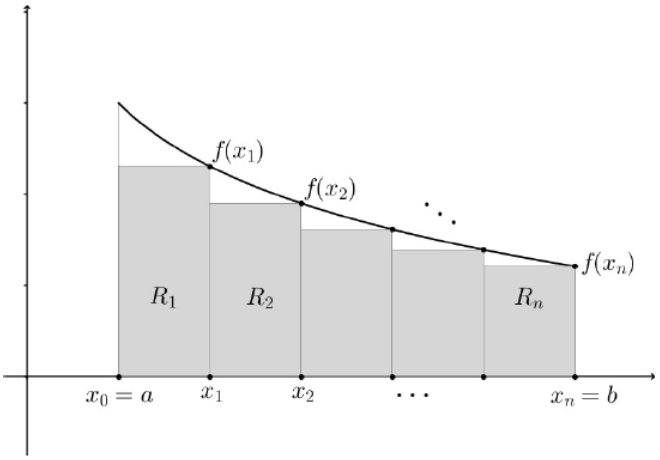


Figura 15 Aproximación de la región *A* usando rectángulos con altura elegida a partir de seleccionar el valor extremo derecho de cada Δx.

La siguiente expresión se obtiene al usar base por altura de cada rectángulo:

$$\underline{S(n)} = \Delta x\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) \right]$$

Usando la notación de sumatoria (véanse sus propiedades al final de esta sección) obtenemos:

$$\underline{S(n)} = \Delta x\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right] = \Delta x\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \right]$$

donde i es el índice de la sumatoria, $f(x_i)$ es el término i-ésimo de la suma, $n(n-1)$ y $1(0)$ son los límites superior e inferior de la sumatoria respectivamente.

De igual forma, se advierte que en la figura 15, la suma de los n rectángulos es denotada con $\overline{S(n)}$, llamada también **suma por la derecha**, $\overline{S(n)} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n$

Al usar base por altura de cada rectángulo se tiene que:

$$\overline{S(n)} = \Delta x\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + ... + f(x_n)\right]$$

Si utilizamos la notación sumatoria obtenemos:

$$\overline{S(n)} = \Delta x\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]$$

En la **suma de Riemann**, se debe observar que la función f no tiene restricciones excepto que está definida en el intervalo $[a,b]$. No obstante, la suma de Riemann no sólo permite tratar el problema de áreas, sino que es posible utilizarla para muchas aplicaciones que comprenden el límite de una suma.

Definición de una suma de Riemann

Sea f definida en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea Δ una partición de $[a,b]$ dada por $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ con $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ para $i = 1, 2, 3, 4, ..., n$

Donde Δx_i es la longitud del i-ésimo subintervalo. Si c_i representa cualquier punto en el i-ésimo intervalo, entonces la suma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, $x_{i-1} \le c_i \le x_i$ se llama **suma de Riemann** de f para la división de Δ.

Regresando al problema planteado, y refiriéndonos a ambas figuras anteriores (14 y 15) se aprecia que: $\underline{S(n)} < A < \overline{S(n)}$. Ambas desigualdades se cumplen cuando se trata de funciones definidas positivas y crecientes en el intervalo. Éste es un caso bastante similar al del área del círculo de radio r. Ahora bien, si el número de n rectángulos es muy grande o, de forma equivalente, si Δx es muy pequeño, entonces el valor de la suma de las áreas rectangulares debe parecerse mucho al área de la región A que deseamos definir.

Como se puede apreciar, cuando Δx se acerca cada vez más a cero (Δx tiende a cero), entonces n se incrementa indefinidamente (n tiende a infinito) y, en consecuencia se observa que tanto $\underline{S(n)}$ como $\overline{S(n)}$ se aproximan al valor exacto del área de la región A. ¡Y precisamente, este es el concepto de límite una vez más! En otras palabras, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S(n)} = A = \lim_{n\to\infty}\overline{S(n)} \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x\right] = A = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right]$$

siempre que el límite exista.

El límite anterior es uno de los conceptos fundamentales de cálculo y se llama la **integral definida** de la función f desde el punto a hasta el punto b del intervalo definido.

Definición de la integral definida de una función

Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. La integral definida de la función f desde el extremo a hasta b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$ es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_1)\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right] = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\left[\sum_{i} f(x_i)\Delta x_i\right]$$

siempre que el límite exista.

Si la integral definida de f desde a hasta b existe, entonces se dice que f es *integrable* sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, y por ende se afirma que la integral *existe* al menos en dicho intervalo. El símbolo $\int$ es el *signo de la integral* (primera letra de la palabra suma). El número a y b son los *límites de integración*, inferior y superior respectivamente. La expresión $f(x)$ se llama *integrando*. El símbolo de diferencial dx está asociado con el incremento Δx y cuya longitud se denota mediante $\|\Delta\|$ (véase la figura 16).

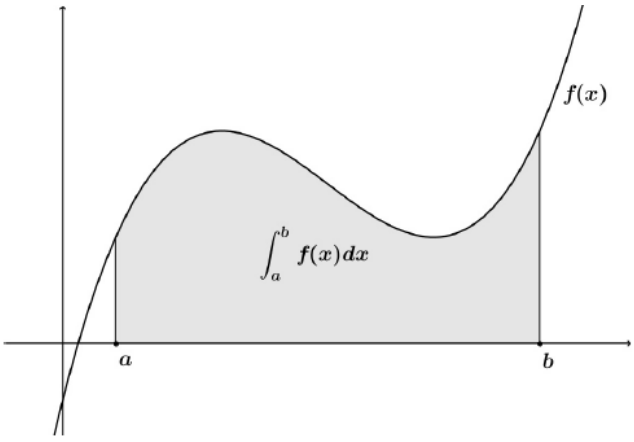


Figura 16 La integral definida puede representar el área bajo la curva descrita por la función $f(x)$.

No es una coincidencia que la notación para las integrales definidas sea similar a la que se usa para las integrales indefinidas estudiadas. Por ahora es importante señalar que las integrales definidas y las indefinidas son identidades diferentes. Una integral definida es un número, mientras que una integral indefinida es una familia de funciones.

Una condición suficiente para que una función f sea integrable en $[a,b]$ es que sea continua en dicho intervalo.

Teorema 2 La continuidad implica integrabilidad

Si una función f es continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Antes de plantear y resolver problemas a partir del uso de la integral definida es importante tomar en cuenta las propiedades de la sumatoria y las fórmulas básicas que resultan de gran utilidad, sobre todo para la suma de potencias inmersa en diversos problemas teóricos y prácticos.

Propiedades de la sumatoria (notación sigma)

1. $\sum k\, f(x_i) = k\sum f(x_i)$ siendo k una constante.
2. $\sum f(x_i)+g(x_i) = \sum f(x_i)+\sum g(x_i)$

Fórmulas básicas de la sumatoria

1. $\sum_{i=1}^{n} k = kn$ siendo k una constante.
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Ejemplo:
Evaluación de una integral definida como un límite.

Evalúa la integral definida $\int_2^1 2x\,dx$

Solución. La función $f(x)=2x$ es integrable en el intervalo $[-2,1]$, ya que es continua en dicho intervalo (véase la figura 17). La longitud de cada uno de los n subintervalos de la partición es: $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n}$

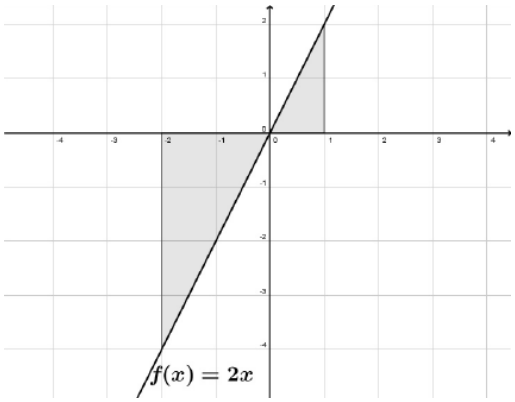


Figura 17 Debido a que la integral definida es negativa, no representa el área de la región delimitada.

Continuación…

Al seleccionar x_i como el punto extremo derecho de cada intervalo obtenemos:

$$f\left(x_i\right)=2\left(a+i\Delta x\right)=2\left(-2+\frac{3i}{n}\right)$$

De esta forma la integral definida está dada por: $\int_{-2}^{1}2xdx=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\left[\sum_i f\left(x_i\right)\Delta x_i\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}f\left(x_i\right)\Delta x\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}2\left(-2+\frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{6}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{3i}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{6}{n}\right)\left\{-2+\frac{3}{n}\left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]\right\}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(-\frac{3}{n}+9\right)\right]\therefore\int_{-2}^{1}2xdx=-3$$

Observación: en virtud de que la integral definida en el ejemplo anterior es negativa, no representa el área de la región descrita en la figura 17. Las integrales definidas pueden ser positivas, negativas o cero. Para que una integral pueda identificarse con el área de cierta región (como se definió al inicio de esta sección), la función f debe ser continua y no negativa sobre el intervalo cerrado $\left[a,b\right]$, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 3 La integral definida como el área de una región

Si f es continua y no negativa sobre el intervalo $\left[a,b\right]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f, el eje X y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ está dada por: $\text{Área}=\int_a^b f\left(x\right)dx$. (véase la figura 18.)

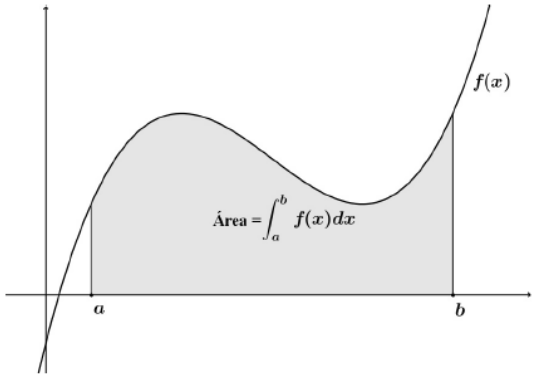


Figura 18 La integral definida es posible utilizarla para determinar el área limitada por la gráfica de la función *f*, el eje *x* y las rectas $x = a$ y $x = b$. La condición necesaria es que la función *f* debe ser continua y no negativa en el intervalo definido.

Ejemplo:
Región acotada por la gráfica de la función f

Determina el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)=4x-x^2$ y el eje x, como se muestra en la figura 19.

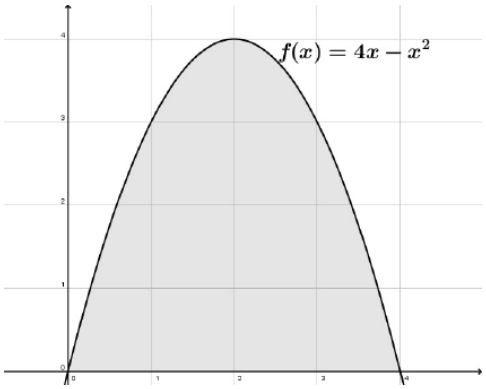


Figura 19 La integral definida representa el área de la región delimitada por la función y el eje x.

Solución. En virtud de que la función f es continua y no negativa en el intervalo $[0,4]$, el área de la región (por el teorema 4) es: $[0,4]$

Ahora bien, para encontrar el valor exacto del área hacemos uso de la definición de límite de la integral definida. Lo primero es definir Δx como la longitud de cada uno de los n subintervalos de la partición del intervalo, $[0,4]$, es decir,

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$$

Al seleccionar xi como el punto extremo derecho de cada intervalo obtenemos:

$$f(x_i) = 4(a+i\Delta x) - (a+i\Delta x)^2 = 4\left(\frac{4i}{n}\right) - \left(\frac{4i}{n}\right)^2$$

De esta forma, la integral definida está dada por: $\int_0^4 \left(4x-x^2\right)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\left[\sum_i f(x_i)\Delta x_i\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(4\left(\frac{4i}{n}\right)-\left(\frac{4i}{n}\right)^2\right)\left(\frac{4}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{4}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(4\left(\frac{4i}{n}\right)-\left(\frac{4i}{n}\right)^2\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{4}{n}\right)\left\{\frac{16}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]-\frac{16}{n^2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{4(16)}{n^2}\right)\left\{\left[\frac{n^2+n}{2}\right]-\frac{1}{n}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right]\right\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{4(16)}{2}\right)\left[\frac{n^2+n}{n^2}\right]-\left(\frac{4(16)}{6}\right)\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}\right]\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{32\left[1+\frac{1}{n}\right]-\left(\frac{32}{3}\right)\left[2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right]\right\}$$

$$= 32[1]-\left(\frac{32}{3}\right)[2] = 32-\frac{64}{3} \quad \therefore \text{Área} = \int_0^4 \left(4x-x^2\right)dx = \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 9 de la página 145 sobre ejercicios de **cálculo integral** de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 228 a 233 del Apéndice 1.

Propiedades de las integrales definidas La definición de integral definida de f sobre el intervalo $[a,b]$ especifica que $a < b$. Sin embargo, ahora es conveniente ampliar esa definición para que abarque los casos en los que $a = b$ o bien cuando los límites de integración se intercambien. Geométricamente las siguientes definiciones especiales implican tratar un área de cierta región de ancho cero y otra de altura finita igual a cero.



Revisa más de este tema en:

Integrales definidas es un tema que aplicarás en el **Módulo 20** página 115.

Definición de dos integrales definidas especiales:

1. Si la función f se define en $x = a$, entonces $\int_{\infty}^{a} f(x)dx = 0$
2. Si la función f es integrable en $[a,b]$, entonces $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{b}^{a} f(x)dx$

Teorema 4 Propiedades de las integrales definidas

Si la función f y g son dos funciones integrables sobre $[a,b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables sobre $[a,b]$, de donde

$$\int_{a}^{b} k\, f(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{a}^{b}\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 10 de la página 147 sobre **propiedades de las integrales** de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en la pág., 235 del Apéndice 1.

El teorema fundamental del cálculo (conexión de las operaciones inversas)

En este punto parece complicado establecer la conexión que existe entre los diferentes problemas tratados y cuyo estudio fundamentó el descubrimiento de las dos partes fundamentales del cálculo matemático.

Issac Newton y Gottfried Leibniz descubrieron dicha conexión, cada cual por su lado. Esa conexión se expresa en un teorema que con toda propiedad se llama **Teorema Fundamental del Cálculo**.

De modo informal el teorema señala lo evidente, que la derivación e integración (definida) son operaciones inversas, en el mismo sentido que lo son la división y la multiplicación. Para reflexionar sobre el modo en que Newton y Leibniz podrían haber anticipado esta relación, considera las aproximaciones mostradas en la figura 20.

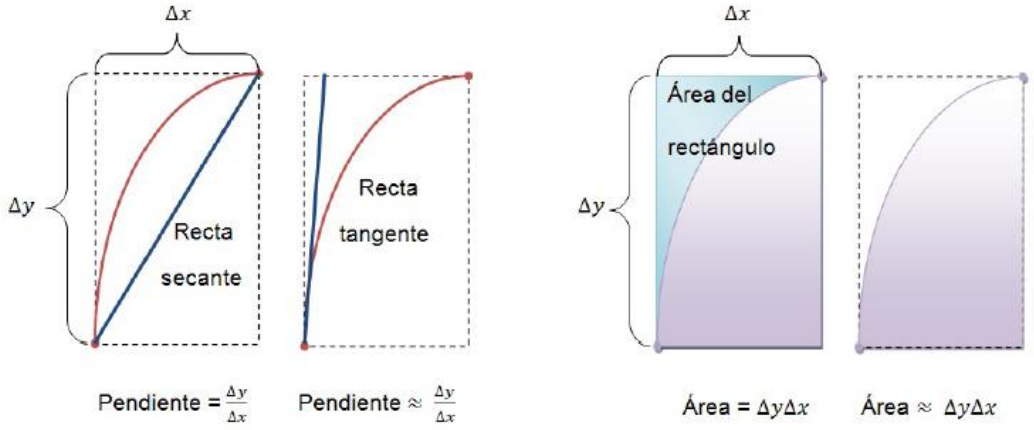


Figura 20 La derivación y la integración definida tienen una relación inversa. (a) Derivación. (b) Integración.

Teorema 5 Teorema fundamental del cálculo

Si una función f es continua en $x_0 \in [a,b]$, entonces $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ es derivable en x_0 y $G'(x_0)=f(x_0)$.

En la notación de Leibniz podemos expresar el resultado del teorema como:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \text{ o bien } \frac{d}{dx}\int f = f$$

Cálculo de integrales definidas mediante el teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo:

A partir del teorema fundamental del cálculo, encuentra: $\int_2^3 t^3 dt$

Solución: En el cálculo de integrales por este método, realizaremos los siguientes cuatro pasos:

Paso 1: consideramos a la integral como función del extremo superior.

$G(x)=\int_2^x t^3 dt$ y posteriormente trataremos de encontrar una expresión más operativa para $G(x)$, pues la integral buscada es $G(3)$.

Paso 2: utilizamos el teorema fundamental del cálculo (TFC).

Por el TFC, $G'(x_0)=x_0^3$, para todo $x_0 \in [2,3]$, lo cual lo escribiremos genéricamente como $G'(x)=x^3$, es decir este teorema nos da información sobre la derivada de la función que buscamos, en este caso sabemos que $\frac{x^4}{4}$ es una función cuya derivada

Continuación…

es x^3, pero en general la derivada no se altera si le sumamos una constante arbitraria, lo cual nos lleva a que $G(x)=\frac{x^4}{4}+C$ es la antiderivada general. En general de manera esquemática diremos que: $G'(x)=x^3 \Rightarrow G(x)=\frac{x^4}{4}+C$, lo cual, salvo la constante C por determinar, nos da una expresión más operativa para $G(x)$.

Paso 3: determinamos la constante de integración C.

Nótese que tenemos dos expresiones para $G(x)$: $G(x)=\frac{x^4}{4}+C$ y $G(x)=\int_2^x t^3 dt$

Para determinar la constante C, debemos conocer la integral en algún valor del intervalo, que en este caso es $x=2$, es decir, $G(2)=\int_2^2 t^3 dt=0$, y evaluando en la otra expresión $G(2)=4+C$.

Igualando ambas expresiones obtenemos: $4+C=0 \Rightarrow C=-4$, obteniendo así el valor de la constante de integración.

Paso 4: evaluamos $G(3)$ para obtener el valor de la integral definida.

Una vez determinada la constante de integración C, queda completamente determinada la expresión para la función G: $G(x)=\frac{x^4}{4}-4$, y por lo tanto $\int_2^3 t^3 dt=G(3)=\frac{3^4}{4}-4=\frac{65}{4}$, es decir, $\int_2^3 t^3 dt=\frac{65}{4}$

Ejemplo:

A partir del teorema fundamental del cálculo, encuentra $\int_0^\pi \text{sen}(t)\,dt$

Solución. Cada una de las siguientes expresiones corresponden a los primeros tres pasos descritos en el ejercicio anterior:

$G(x)=\int_0^x \text{sen}(t)\,dt \Rightarrow G'(x)=\text{sen}(x) \Rightarrow G(x)=-\cos(x)+C$

Para determinar la constante C, evaluamos en $x=0$, $G(0)=\int_0^0 \text{sen}(t)\,dt=0$, y al evaluar en la otra expresión $G(0)=-1+C$

Igualando ambas expresiones obtenemos $-1+C=0$, obteniendo el valor de $C=1$, y en consecuencia: $\int_0^\pi \text{sen}(t)\,dt=G(\pi)=-\cos(\pi)+1=2$. Es decir, $\int_0^\pi \text{sen}(t)\,dt=2$

El valor de la constante de integración es la antiderivada evaluada en el extremo izquierdo del intervalo de integración y finalmente el valor de la integral definida es la antiderivada evaluada en el extremo derecho menos la antiderivada evaluada en el extremo izquierdo, como se asienta en el siguiente resultado, mismo que es consecuencia inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo, por lo que se le llama corolario.

Corolario del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), también llamado Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Sea f una función es continua en el intervalo $[a,b]$ y la función $g(x)$ una antiderivada de f, es decir satisface $g'(x)=f(x)$ entonces $\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$.

Ejemplo:

Utilizando el corolario del TFC, evalúa la integral $\int_2^3 x^3 dt$

Solución. sólo hay que encontrar una función g que satisfaga $g'(x)=x^3$ y una de tales funciones es $g(x)=\frac{x^4}{4}$, y en consecuencia:

$$\int_2^3 x^3 dx = g(3)-g(2)=\frac{(3)^4}{4}-\frac{(2)^4}{4}=\frac{81-16}{4}=\frac{65}{4}$$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 12 sobre el **teorema fundamental** de la página 152 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs.., 236 a 243 del Apéndice 1.

Integración por sustitución

Teorema 6 Antiderivación de una función compuesta

Sea g una función cuyo rango es un intervalo I, y sea f una función continua sobre I. Si la función g es derivable en su dominio y F es una antiderivada de f sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))+C$$

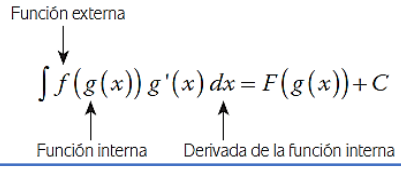
Si la función $u=g(x)$, entonces $du=g'(x)dx$ y $\int f(u)du = F(u)+C$

Nota: la proposición del teorema anterior no indica cómo distinguir entre $f(g(x))$ y $g'(x)$ en el integrando.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 13 sobre **reconocimiento de patrones** de la página 154 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 243 a 245 el Apéndice 1.

A continuación, los ejemplos 1 y 2 muestran cómo aplicar el teorema 6 directamente, reconociendo la presencia de $f\left(g\left(x\right)\right)$ y $g'\left(x\right)$. Observa que la función compuesta en el integrando tiene una función externa f y una función interna g. Además, la derivada $g'\left(x\right)$ está presente como factor en el integrando.



Ejemplo:

Reconocimiento de patrón $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$

Encuentra $\int 2x\left(x^2+1\right)^2 dx$

Solución. Al definir $g\left(x\right)=x^2+1$, se obtiene $g'\left(x\right)=2x$ y de esta forma se reconoce 100. Luego entonces se reconoce que el integrando sigue el patrón $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$. Al usar la regla de la potencia para la integración (véase la tabla 1, de la sección 2.2) y el teorema 2.6, se tiene que:

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx=\int 2x\left(x^2+1\right)^2 dx=\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^3+C \ .$$

Ahora bien, al utilizar la regla de la cadena se podrá comprobar que la derivada de la antiderivada, $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^3+C$, es precisamente el integrando de la integral original (por el Teorema Fundamental del Cálculo).

Ejemplo:

Reconocimiento de patrón $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$

Encuentra $\int 5\cos\left(5x\right)dx$

Solución. Al definir $g\left(x\right)=5x$, se obtiene $g'\left(x\right)=5$ y de esta forma se reconoce $f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(5x\right)=\cos\left(5x\right)$. Luego entonces se reconoce que el integrando sigue el patrón $f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$. Al usar la regla del coseno para la integración y el teorema anterior, se tiene que:

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx=\int 5\cos\left(5x\right)dx=\operatorname{sen}\left(5x\right)+C \ .$$

Para desarrollar habilidad matemática se requiere comprobar que al derivar la antiderivada $\operatorname{sen}\left(5x\right)+C$ se obtiene el integrando original.

Es posible extender considerablemente esta técnica considerando la regla de la constante múltiple.

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Ejemplo:
Multiplicación y división entre una constante

Determina $\int x\left(x^2+1\right)^2\,dx$

Solución. Sabemos que $2x$ es la derivada de x^2+1, entonces podemos hacer $g(x)=x+1$ y proporcionar $2x$ como sigue:

$$\int x\left(x^2+1\right)^2\,dx = \int \frac{1}{2}(2x)\left(x^2+1\right)^2\,dx$$

se multiplicó y dividió entre 2. Ahora sacamos la constante $\frac{1}{2}$ de la integral:

$$\frac{1}{2}\int (2x)\left(x^2+1\right)^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^3}{3}\right]+C = \frac{1}{6}\left(x^2+1\right)^3+C$$

Cambio de variable

Con un cambio de variable formal, se escribe de nuevo la integral en términos de la variable u y su derivada du (o cualquier otra variable conveniente). La técnica de cambio de variable es muy útil cuando se trabaja con integrandos complicados en álgebra. La técnica de cambio de variable usa la notación de Leibniz para la derivada, es decir, si $u=g(x)$, entonces $du=g'(x)\,dx$, y la integral del teorema 6 toma la siguiente forma:

$$\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u)+C$$

Ejemplo:
Cambio de variables en una integral indefinida

- Encuentre $\int \sqrt{2x-1}\,dx$

Solución. Realizar cambio de variable

Sea $u=2x-1$, entonces $du=2dx$, implicando que $dx=\frac{du}{2}$

Al sustituir en la integral se obtiene la expresión $\int \sqrt{2x-1}dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right)$

A partir de la expresión encontrada ya sólo resta proceder a integrar.

$$=\frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)+C = \frac{2}{6}u^{3/2}+C = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}+C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}+C$$

Ejemplos:

- Encuentra $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$

Solución. Realizar cambio de variable

Sea $u=2x-1$, entonces $du=2dx$, implicando que $dx=\frac{du}{2}$. Como el integrando tiene un factor de x, también se tiene que despejar x en términos de u, como sigue:

$$u=2x-1\Rightarrow x=\frac{u+1}{2}$$

Al sustituir en la integral se obtiene la expresión $\int x\sqrt{2x-1}dx=\int\left(\frac{u+1}{2}\right)\sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right)$

Una vez más, ya obtenida la expresión en su forma más sencilla, se procede a integrar como es usual.

$$=\frac{1}{4}\int\left(u^{3/2}+u^{1/2}\right)du=\frac{1}{4}\left(\frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}}+\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)+C=\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}+\frac{1}{6}(2x+1)^{3/2}+C$$

Resumen los pasos que se siguen para la integración por sustitución

Directrices para hacer un cambio de variable

1. Elegir una sustitución $u=g(x)$. Casi siempre es conveniente elegir la parte interna de una función compuesta; digamos una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $du=g'(x)dx$.
3. Escribir de nuevo la integral en términos de la variable u y du .
4. Evaluar la integral en términos de u.
5. Sustituir la variable u por $g(x)$ para obtener una antiderivada en términos de x .
6. Comprobar el resultado mediante la derivación.

Regla general de la potencia para la integración

Una de las sustituciones de u más comunes comprende cantidades (funciones) en el integrando elevadas a una cierta potencia. Debido a la importancia de este tipo de sustitución se le da el nombre especial de Regla general de la potencia.

Teorema 7 Regla general de la potencia para la integral.

Si $g(x)$ es una función derivable, entonces $\int\left[g(x)\right]^n g'(x)dx=\frac{\left[g(x)\right]^{n+1}}{n+1}+C \quad n\neq -1$

Si definimos $u=g(x)$, entonces $\int u^n du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad n\neq -1$

Ejemplos:
Sustitución y regla general de la potencia

a) $$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C = -u^{-1} + C = -\frac{1}{(x+1)} + C$$

b) $$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{-du}{u^4} = -\int u^4 du = -\frac{u^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{-3}u^{-3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sec^3 x + C \qquad \text{se aplicó la propiedad } \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

c) $$\int \frac{\cos x}{\text{sen}^3 x}dx = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = \frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2}u^{-2} + C = -\frac{1}{2\,\text{sen}^2 x} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\csc^2 x + C \qquad \text{se aplicó la propiedad } \frac{1}{\text{sen } x} = \csc x$$

Cambio de variable para integrales definidas

Cuando se utiliza la sustitución u con una integral definida, a menudo es conveniente determinar los límites de integración para la variable u en lugar de convertir la antiderivada otra vez a la variable x y evaluar la función en los límites originales.

Teorema 8 Cambio de variable para integrales definidas

Si la función $u = g(x)$ tiene una derivada continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$ y la función f es continua en el rango de la función g, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Ejemplos:
Cambio de variable en integral definida

- Evalúa $\int_0^1 x(x^2+2)^3\,dx$

Solución: Sea $u = x^2 + 2$, entonces $du = 2xdx$, implicando que $xdx = \frac{du}{2}$

Antes de sustituir, determinaremos los nuevos límites de integración.

Límite inferior: Cuando $x = 0$, se tiene que $u = (0)^2 + 2 = 2$

Límite superior: Cuando $x = 1$, tenemos que $u = (1)^2 + 2 = 3$.

Ahora es posible sustituir para obtener:

$$\int_0^1 x\left(x^2+2\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+2\right)^3 (2x)dx = \frac{1}{2}\int_2^3 u^3 du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^4}{4}\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{(3)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{81}{4} - \frac{16}{4}\right) = \frac{65}{8}$$

- Evalúa $\int_1^2 \frac{dx}{2x}$

Solución: Sea $u = 2x$, entonces $du = 2dx$ **,** implicando que $dx = \frac{du}{2}$

Antes de sustituir, determinaremos los nuevos límites de integración.

Límite inferior: Cuando $x = 1$, se tiene que $u = 2(1) = 2$

Límite superior: Cuando $x = 2$, tenemos que $u = 2(2) = 4$.

Ahora es posible sustituir para obtener:

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\left[\ln(u)\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left(\ln(4) - \ln(2)\right)$$

$$\approx \frac{1}{2}(1.386 - 0.693) \approx 0.346$$

- Evalúa $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

Solución: Sea $u = \sqrt{2x-1}$, entonces al elevar al cuadrado y despejar x tenemos:

$u^2 = 2x-1 \Rightarrow u^2+1 = 2x \Rightarrow \frac{u^2+1}{2} = x$, derivando ambos miembros: $\Rightarrow udu = dx$

Antes de sustituir, determinaremos los nuevos límites de integración.

Límite inferior: Cuando $x = 1$, se tiene que $u = \sqrt{2(1)-1} = 1$

Límite superior: Cuando $x = 5$, tenemos que $u = \sqrt{2(5)-1} = 3$.

Ahora es posible sustituir para obtener:

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^3 \frac{1}{u}\left(\frac{u^2+1}{2}\right)udu = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(u^2+1\right)du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}+u\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(9+3-\frac{1}{3}-1\right) = \frac{16}{3}$$

Geométricamente, podemos interpretar la ecuación: $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^3 \left(\frac{u^2+1}{2}\right)du$ para indicar que las dos regiones diferentes que se muestran en las figuras 21 y 22 tienen la misma área (valor de $\frac{16}{3}$).

Continuación…

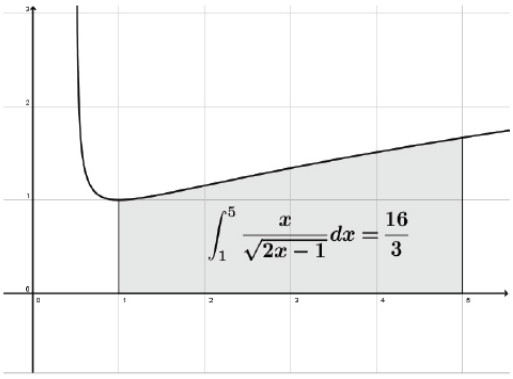


Figura 21 La región bajo la curva antes de la sustitución tiene un valor de $\frac{16}{3}$.

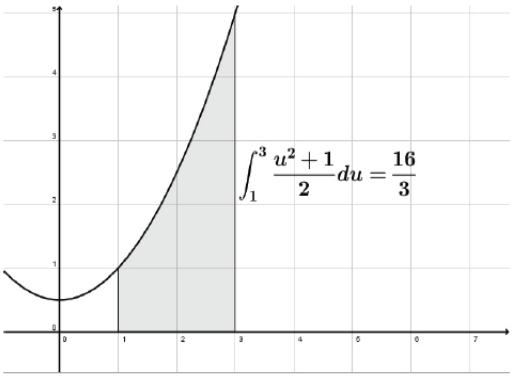


Figura 22 La región bajo la curva después de la sustitución tiene un valor de $\frac{16}{3}$.

Cuando se evalúan integrales definidas por medio de la técnica de sustitución es posible que el límite superior de integración de la forma variable u sea más pequeño que el límite inferior. Si este es el caso no se deben cambiar los límites; en su lugar sólo debe hacerse la evaluación como siempre.

Por ejemplo, después de sustituir $u=\sqrt{1-x}$ en la integral $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$ se obtiene lo siguiente:

Límite inferior: cuando $x=0$ se tiene que $u=\sqrt{1-(0)}=1$

Límite superior: cuando $x=1$, tenemos que $u=\sqrt{1-(1)}=0$

Por lo tanto, la forma correcta de la sustitución al usar la variable u en esta integral

definida es $-2\int_1^0 \left(1-u^2\right)^2 u\,du$

Aún con el cambio de variable la integración puede ser difícil de llevar a cabo. En ocasiones es posible simplificar la evaluación de una integral definida (sobre un intervalo que es simétrico al eje y o al origen) si se reconoce que el integrando es una función par o impar. (ver figura 23).

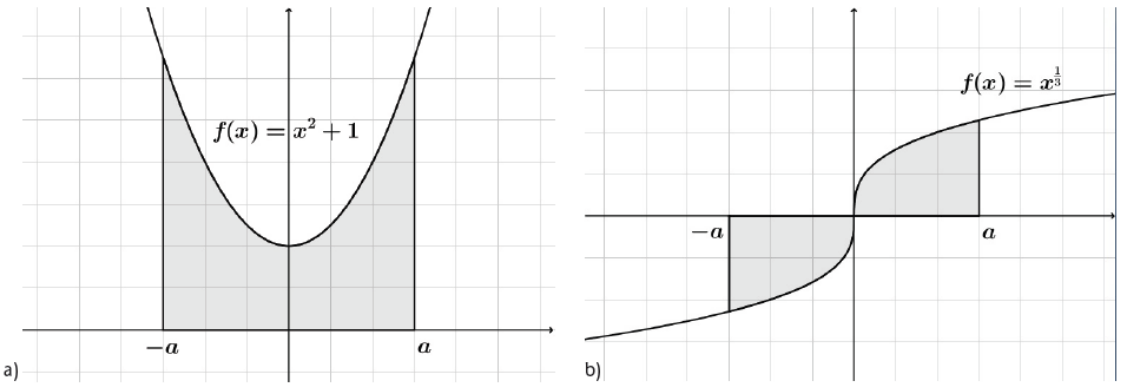


Figura 23a y 23b (a) Representación gráfica del área de una región bajo una función par. (b) Representación gráfica del área de una región bajo una función impar en el intervalo cerrado $[-a,a]$.

Teorema 9 Integración de funciones pares e impares

Sea f una función integrable en intervalo cerrado $[-a,a]$.

1. Si f es una función *par*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

2. Si f es una función *impar*, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Ejemplo:
Integración de una función impar

Evalúa $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\operatorname{sen}^3 x\cos x + \operatorname{sen} x\cos x\right]dx$

Solución: Sea $f(x) = \operatorname{sen}^3 x\cos x + \operatorname{sen} x\cos x$, entonces

$$f(-x) = \operatorname{sen}^3(-x)\cos(-x) + \operatorname{sen}(-x)\cos(-x) = -\operatorname{sen}^3 x\cos x - \operatorname{sen} x\cos x = -f(x)$$

Esto implica que la función f es impar, y como el intervalo $\left[-\pi/2, \pi/2\right]$ es de la forma $[-a,a]$ (simétrica al origen), es posible aplicar el teorema 9 para concluir que:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\operatorname{sen}^3 x\cos x + \operatorname{sen} x\cos x\right]dx = 0$$

En la figura 24 se puede observar que las dos regiones en cualquier lado del eje y tienen la misma área. No obstante, como una yace bajo el eje x y la otra está arriba de él, la integración produce un efecto de cancelación.

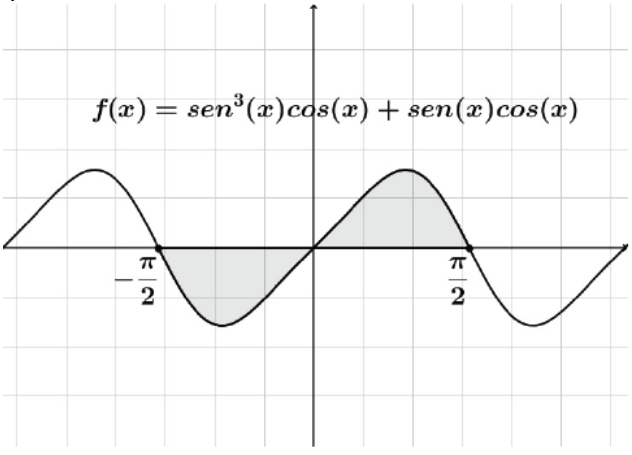


Figura 24 Debido a que $f(x)$ es una función impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Valor promedio y área comprendida entre dos curvas

El Teorema del valor medio para integrales, indica que en algún lugar "entre" el rectángulo inscrito y el circunscrito existe un rectángulo cuya área es precisamente igual a la de la región bajo la curva, como se muestra en la figura 25.

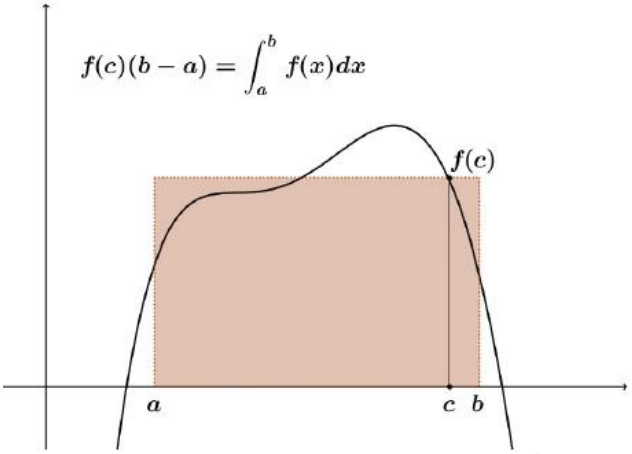


Figura 25 Rectángulo de valor medio: $f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$.

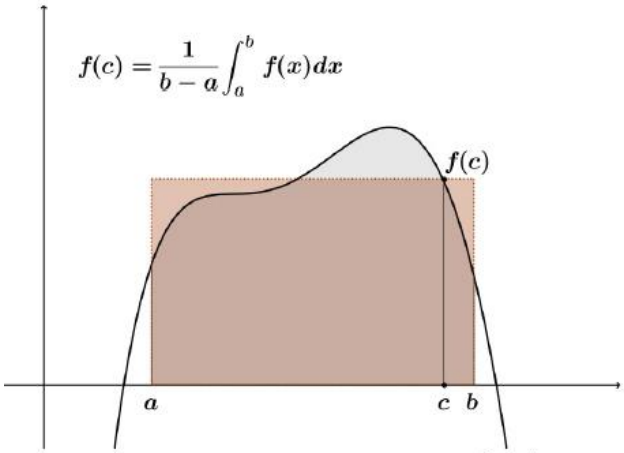


Figura 26 Valor promedio: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Teorema 10 Teorema del valor medio para integrales

Si f una función continua en intervalo cerrado $[a,b]$ entonces existe un número c en el intervalo $[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

El teorema del valor medio proporciona el denominado **valor promedio** de la función f sobre el intervalo $[a,b]$. En la figura 26 se debe observar que el área de la región bajo la gráfica de f es igual al área del rectángulo cuya altura es precisamente el valor promedio, $f(x)$.

Definición de valor promedio de una función sobre un intervalo

Si la función f es integrable sobre un intervalo cerrado $[a,b]$, el valor promedio de f sobre dicho intervalo es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Considerando dos funciones f y g continuas sobre el intervalo cerrado $[a,b]$. Si la gráfica de la función g yace debajo la función f, es posible interpretar de manera geométrica el área de la región comprendida entre dichas gráficas como el área de la región bajo la gráfica de g restada del área de la región bajo la gráfica de f, como se muestra en la figura 27.

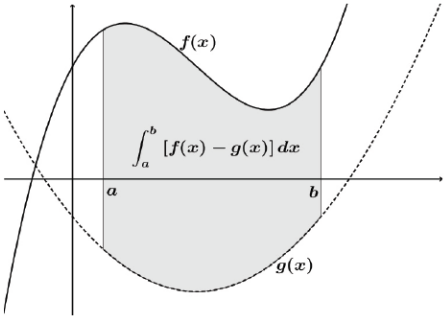


Figura 27 $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$.

Área de una región comprendida por dos curvas

Si f y g son funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todos los valores de x en $[a,b]$, entonces el área de la región comprendida por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ es $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 15 sobre **área en regiones curvas** de la página 166 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 246 a 249 del Apéndice 1.

Aplicaciones de la integración

¡Atención! Revisa los ejercicios de las páginas 168 a 173, pues son importantes para la aplicación de la parte teórica en situaciones prácticas.

La definición de integral definida $\int_a^b f(x)dx$ necesita que el intervalo cerrado $[a,b]$ sea finito. Además el teorema fundamental del cálculo (ver Teorema 5), por medio del cual se han evaluado las integrales definidas, requiere que la función f sea continua en $[a,b]$. En el ejemplo anterior se planteó un procedimiento para evaluar integrales que no cumplen con estos requisitos, y pueden tratarse casos donde uno o ambos límites de integración son infinitos, o donde la función f tiene un número finito de discontinuidades infinitas en el intervalo $[a,b]$. Las integrales que poseen cualquiera de estas propiedades se denominan **integrales impropias**. Se dice que una función f tiene una **discontinuidad infinita** en c si, por la izquierda o por la derecha (límites laterales son iguales a infinito), $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ o $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$

Ejemplos:
Integrales impropias

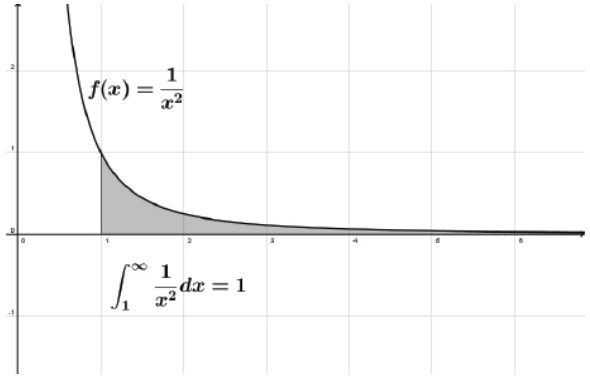
Evaluar: $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^b = -\frac{1}{b}+1 = 1-\frac{1}{b}$

que puede interpretarse como el área de la región descrita en la figura 35. Al obtener el límite cuando $b\to\infty$ se produce $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{1}{x^2}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$

Esta integral impropia puede interpretarse como el área de la región no acotada entre las gráficas de $f(x)=\frac{1}{x^2}$ y en el eje x (a la derecha de $x=1$)

Continuación…

Figura 35 La región no acotada tiene un área de $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.



Definición de integrales impropias con límites de integración infinitos

1. Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a,\infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

2. Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $(-\infty,b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

3. Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $(-\infty,\infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

donde c es cualquier número real.

En los dos primeros casos, la integral impropia **converge** si el límite existe; de lo contrario, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia a la izquierda de la igualdad diverge si cualquiera de las integrales impropias a la derecha diverge y converge si los dos límites existen.

El segundo tipo básico de integrales impropias es el que tiene una discontinuidad en o entre los límites de integración.

Definición de integrales impropias con discontinuidades infinitas

1. Si f es una función continua sobre el intervalo $[a,b)$, y tiene una discontinuidad en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\left(\int_a^c f(x)\,dx\right)$$

2. Si f es una función continua sobre el intervalo $(a,b]$, y tiene una discontinuidad en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\left(\int_c^b f(x)\,dx\right)$$

3. Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado $[a,b]$, excepto para algún valor de c en (a,b) en el que f tiene una discontinuidad infinita, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

En los dos primeros casos, la integral impropia **converge** si el límite existe; de lo contrario, la integral impropia **diverge**. En el tercer caso, la integral impropia a la izquierda de la igualdad diverge si cualquiera de las integrales impropias a la derecha diverge y converge si las dos integrales impropias convergen.

ACTIVIDAD:

- ✓ Realiza la actividad 16 sobre la **aplicación del cálculo** en fenómenos naturales y procesos sociales de la página 175 de la versión electrónica correspondiente a este módulo, corrobora tus respuestas en las págs., 249 a 255 del Apéndice 1.

¡Atención! Revisa el tema de **Cálculo integral en fenómenos naturales y procesos sociales** de las páginas 177 y 178.

#Entrénate

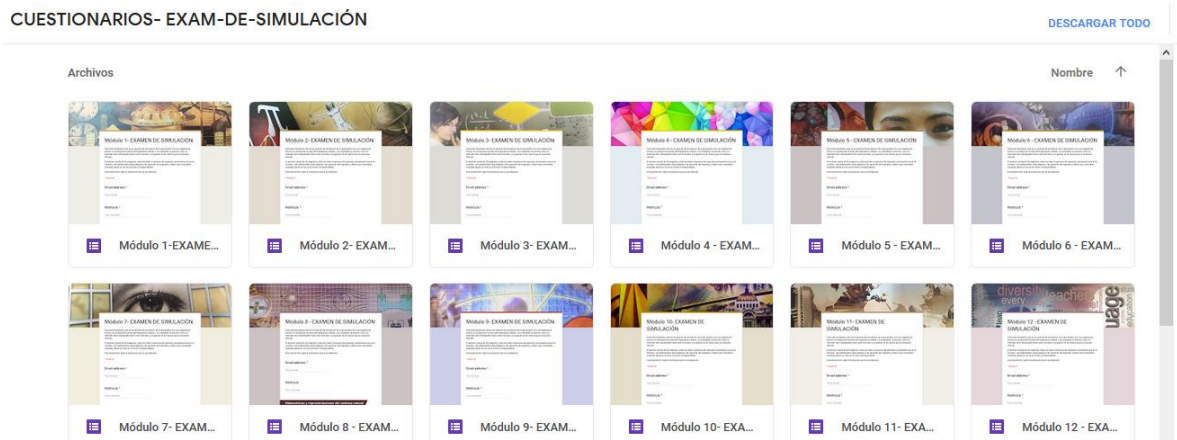
Hemos llegado al final de este módulo, ahora te toca revisar que tan preparado estás para el examen de acreditación.
Como pudiste observar en el Curso propedéutico de Comunicación, el examen para acreditar tu modulo tiene retos importantes en cuanto al manejo de Tecnologías de Información y Comunicación y el seguimiento de instrucciones.

Antes de realizar el examen real, entrénate con la evaluación **¿Ya estoy preparado(a)?** que se encuentra en la sección final del libro, donde al terminar podrás verificar tus respuestas en el **Apéndice 1**. También prepárate con nuestro **simulador de examen**, el cual te servirá como un indicador de tu desempeño y te guiará en los temas necesarios a reforzar, para ello sigue las siguientes indicaciones:

1. Ingresa a nuestra página de internet www.seg.guanajuato.gob.mx/prepaabierta.



2. Elige el examen de simulación correspondiente a este módulo.



3. Escribe tus datos de identificación: Nombre, matrícula, ¿Dónde estudio? en su caso grupo de estudio, Centro de Asesoría al que perteneces, o si eres estudiante independiente.

4. Comienza a contestar las preguntas, toma en cuenta los siguientes criterios:

4.1. Lee con detenimiento cada una de las preguntas, sigue la guía ¿cómo son los exámenes? Que aparece en el Curso propedéutico de comunicación.

4.2 No dejes ninguna pregunta sin contestar

4.3. No hay límite de oportunidades para contestar el examen

5. Según tus resultados úbica los temas que necesitas revisar nuevamente antes de realizar el examen de acreditación.

ANEXO 1. CORRECCIONES DE EDICIÓN AL LIBRO

Referencia		Dice	Debe decir
Página	Número/ inciso		
41	Cuadro: Definición de límite de una función	$F(q+\alpha)=L+\beta F(a+\alpha)=L+\beta$, con β infinitesimal.	F(a+α)=L+βF(a+α)=L+β, con β infinitesimal.
42	Dentro del cuadro	$f(1+\alpha)0\frac{4}{3}+\text{infinitesimal}$.	$f(1+\alpha)=\frac{4}{3}+infinitesimal$
63	Cuadro: Definición de continuidad	1. $f(c)$ está bien definida. 2. $\lim_{x\to c} f(c)$ existe. 3. $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$.	1. $f(a) existe$ 2. $\lim_{x\to c} f(x) existe$ 3. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$
68	Dentro del desarrollo del tema	$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\lvert x-3\rvert-0}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{x-3}=1$	$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\lvert x-3\rvert-0}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{x-3}=1$
77	Dentro del desarrollo del tema, ejemplo inciso c	Si $y=\frac{1}{2\sqrt[3]{x^2}}$, entonces $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right]=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{2}{3}}\right]\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}\right]$	$=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{2}{3}}\right]=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}$
78	Dentro del desarrollo del tema, ejemplo inciso a	a) Si $g'(t)=3t^2-8t+2$, entonces $g'(t)=3t^2-8t+2$	a) Si $g(t)=3t^2-8t+2$, entonces $g'(t)=6t-8$
80	Dentro del desarrollo del tema, ejemplo inciso a y b	a) Si $h(t)=(-t+t^2)(5-4t)$, entonces $h'(t)=(-t+t^2)\frac{d}{dt}[5-4t]+(5-4t)\frac{d}{dt}(-t+t^2)$ $=(-t+t^2)(-4)+(5-4t)(-1+2t)h'(t)$ $=(4t-4t^2)+(-5+10t+4t-8t^2)h'(t)$ $=-12t^2+18t-5$ b) Si $f(x)=x\,\text{sen}(x)$, entonces $f'(x)=\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)]+\text{sen}(x)\frac{d}{dx}[x]f'(x)$ $=x\cos(x)+\text{sen}(x)(1)f'(x)$ $=x\cos(x)+\text{sen}(x)$	Eliminar los términos del inciso a y b, que se encuentran en el recuadro ($h'(t)$ y $f'(x)$).
91	Ejemplo 1	$d(t)=-4.9t^t+323.4t$	$d(t)=-4.9t^2+323.4t$
93	Ejemplo 1	$d'(66)=-646.8+323.4=323.4$ s	d'(66)=-646.8+323.4=323.4m

126	Dentro del desarrollo del tema, ejemplo 5, inciso c	a) $\int\left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$ **Nota:** cuando se integran cocientes no se debe integrar por separado el numerador y denominador, esto no es válido en la integración y diferenciación. $\int\left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right)dx\neq\frac{\int(x+2)dx}{\int\sqrt{x}\,dx}$ b) $\int\frac{sen\,x}{cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{cos\,x}\right)\left(\frac{sen\,x}{cos\,x}\right)dx=\int sec\,x\tan x\,dx=sec\,x+C$ c) $\int\left(\frac{x+2}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{x}{\sqrt{x}}\right)dx$	No considerar el inciso c, pues es el mismo ejercicio que el inciso a.
144	Dentro del desarrollo del tema, ejemplo 1	$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{6}{n}\right)\left\{-2+\frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(-12+9+\frac{9}{n}\right)\right]\ \therefore\int_{-2}^{1}2x\,dx=-3$	$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{6}{n}\right)\left\{-2+\frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\}\right]$ $=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{12}{n}+9+\frac{9}{n}\right]\ \therefore\int_{-2}^{1}2x\,dx=9$ La función debe ser continua y no negativa (números naturales) para un intervalo cerrado.
158	Dentro del desarrollo del tema, ejemplo 6	$\int sen^3(2x)\cos(2x)\,dx\int u^3\left(\frac{du}{2}\right)$	$\int sen^3(2x)\cos(2x)\,dx=\int u^3\left(\frac{du}{2}\right)$
168		$-\frac{3}{2}x+404.5,\ -\frac{3}{2}x+404.5,$	$-\frac{3}{2}x+404.5,\quad 50\le x\le 80$
203	Apéndice	Insertar gráfico 6	

Fuentes consultadas

Villanueva, O. (2012). Cálculo en fenómenos naturales y procesos sociales. México: SEP.

Figura 1 https://kenklocke.wordpress.com/2015/10/19/%E2%88%AB%C2%B6l-e-e-%E2%80%A2/

seg.guanajuato.gob.mx

GTO
Grandeza de México

Secretaría
de Educación

PREPARATORIA ABIERTA
GUANAJUATO

